

VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Katedra pružnosti a pevnosti

Experimentální a MKP analýza křivého prutu

Experimental and FEM Analysis the Curved Beam

Student:

Stanislav Soška

Vedoucí bakalářské práce:

Ing. František Fojtík, Ph.D.

Ostrava 2012

VŠB - Technická univerzita Ostrava  
Fakulta strojní  
Katedra pružnosti a pevnosti

## Zadání bakalářské práce

Student: **Stanislav Soška**  
Studijní program: B2341 Strojírenství  
Studijní obor: 3901R003 Aplikovaná mechanika  
Téma: **Experimentální a MKP analýza křivého prutu**  
**Experimental and FEM Analysis the Curved Beam**

Zásady pro vypracování:

1. Proved'te měření deformace dané konstrukce křivého prutu pro stanovené zatížení.
2. Vytvořte MKP model křivého prutu.
3. Stanovte okrajové podmínky řešeného modelu.
4. Proved'te analytickou a numerickou napěťově deformační analýzu křivého prutu.
5. Srovnajte výpočet s měřením.

Seznam doporučené odborné literatury:

FUXA, J., ADÁMKOVÁ, L.: Sběrka příkladů z pružnosti a pevnosti II. 2. část, skriptu VŠB-TU Ostrava, 2008. 139 s. ISBN 978-80-248-1933-4.

LENERT, J.: Pružnost a pevnost II, Ostrava, skriptu VŠB-TU Ostrava, 1998. 173 s. ISBN 80-7078-572-1.

KOLÁŘ, V., NĚMEC, I., KANICKÝ, K.: FEM - Principy a praxe metody konečných prvků. Brno: Computer Press, 1997.

LENERT, J.: Úvod do metody konečných prvků. 1. Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 1999. 109 s. ISBN 80-7078-686-8.

Ansys Inc. Documentation for ANSYS Release 13.0. SAS IP, Inc., 2011.

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. František Fojtík, Ph.D.**

Datum zadání: 16.12.2011

Datum odevzdání: 21.05.2012



doc. Ing. Radim Halama, Ph.D.  
vedoucí katedry



prof. Ing. Radim Farana, CSc.  
děkan fakulty

Místopřísežné prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou bakalářskou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě: 21.5.2012

Stanislav Soška

Podpis studenta

Prohlašuji, že

- Jsem byl seznámen s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě bakalářskou práci užít (§ 35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že diplomová (bakalářská) práce bude v elektronické podobě uložena v Ústřední knihovně VŠB-TUO k nahlédnutí a jeden výtisk bude uložena vedoucího bakalářské práce. Souhlasím s tím, že údaje o kvalifikační práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- beru na vědomí, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě: 21.5.2012

Stanislav Soška

Podpis

Jméno a příjmení autora práce:

Stanislav Soška

Adresa trvalého pobytu autora práce:

Ostrava, Hrabová

Šrobarová 519/5, 720 00

## **ANOTACE BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

SOŠKA, S. *Experimentální a MKP analýza křivého prutu: bakalářská práce*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra pružnosti a pevnosti, 2012, 60 s. Vedoucí práce: Fojtík, F.

Bakalářská práce je zaměřena na experimentální měření dvou konstrukcí křivých prutů pomocí tenzometrů. Je navržena úprava stávajícího upínacího přípravku a provedeno měření. Naměřené výsledky jsou porovnány s analytickým výpočtem podle teorie slabě a silně zakřivených prutů a s výsledky získanými MKP napětově – deformační analýzou provedenou v programu ANSYS 12.1.

## **ANNOTATION OF BACHELOR THESIS**

SOŠKA, S. *Experimental and FEM Analysis the Curved Beam: Bachelor Thesis*. Ostrava: VŠB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics of Materials, 2012, 60 p. Thesis head: Fojtík, F.

Bachelor thesis is focused on experimental measurement of two constructions of curved beams using strain gauges. Modification of the existing fixture was proposed and the measurement was performed. Measured results are compared with the analytical calculation using the theory of thin and thick curved beams and with the results obtained by FEM stress - strain analysis performed in ANSYS 12.1.

# Obsah

<b>Seznam použitých značek a symbolů .....</b>	<b>7</b>
<b>1 Úvod.....</b>	<b>9</b>
<b>2 Prut v pružnosti a pevnosti.....</b>	<b>10</b>
2.1 Prutové předpoklady .....	10
2.2 Rozdělení prutů.....	10
2.2.1 Hledisko geometrie prutu .....	10
2.2.2 Hledisko vazeb .....	12
2.2.3 Hledisko zatížení .....	12
2.3 Napjatost prutů.....	12
2.3.1 Napjatost přímých prutů .....	12
2.3.2 Napjatost křivých prutů .....	14
2.4 Energie napjatosti prutů .....	16
2.4.1 Energie napjatosti slabě zakřiveného prutu .....	16
2.4.2 Energie napjatosti silně zakřivených prutů.....	16
<b>3 Tenzometrie .....</b>	<b>17</b>
3.1 Elektrické odporové tenzometry .....	17
3.1.1 Princip měření elektrickými odporovými tenzometry .....	18
3.2 Způsoby zapojení tenzometrů do můstku .....	18
<b>4 Experimentální měření .....</b>	<b>19</b>
4.1 Zapojení měřicího obvodu .....	19
4.2 Popis použitého zařízení a přístrojů.....	20
4.3 Úprava upínacího přípravku .....	22
4.4 Měřená konstrukce č. 1 .....	24
4.5 Měřená konstrukce č. 2 .....	25
4.6 Výsledky měření .....	26
4.6.1 Konstrukce č. 1 .....	26
4.6.2 Konstrukce č. 2 .....	27
<b>5 Analytické řešení .....</b>	<b>28</b>
5.1 Řešení konstrukce jako slabě zakřivený prut.....	29
5.1.1 Uvolnění řešené konstrukce .....	29
5.1.2 Výpočet reakcí z rovnic rovnováhy .....	29
5.1.3 Stanovení výsledných vnitřních silových účinků .....	30
5.1.4 Výpočet napětí v místě B .....	32

5.1.5	Výpočet posunutí bodu A .....	33
5.2	Řešení konstrukce jako silně zakřivený prut .....	36
5.2.1	Výpočet napětí v místě B .....	37
5.2.2	Výpočet posunutí bodu A .....	38
<b>6</b>	<b>MKP napěťově - deformační analýza řešených konstrukcí.....</b>	<b>40</b>
6.1	Přehled prvků použitých v MKP analýze .....	40
6.2	Řešení konstrukce č. 1 pomocí prvků typu solid .....	41
6.2.1	Definování okrajových podmínek .....	41
6.2.2	Konečnoprvkový model .....	41
6.2.3	Vykreslení minimálního hlavního napětí .....	42
6.2.4	Vykreslení maximálního hlavního napětí.....	43
6.2.5	Vykreslení posuvů .....	43
6.3	Řešení konstrukce č. 1 pomocí prvků typu shell .....	44
6.3.1	Definování okrajových podmínek .....	44
6.3.2	Konečnoprvkový model .....	44
6.3.3	Vykreslení minimálního hlavního napětí .....	45
6.3.4	Vykreslení maximálního hlavního napětí.....	46
6.3.5	Vykreslení posuvů .....	46
6.4	Řešení konstrukce č. 2 pomocí prvků typu solid .....	47
6.4.1	Okrajové podmínky .....	47
6.4.2	Konečnoprvkový model .....	47
6.4.3	Vykreslení minimálního hlavního napětí .....	48
6.4.4	Vykreslení maximálního hlavního napětí.....	49
6.4.5	Vykreslení posuvů .....	49
<b>7</b>	<b>Porovnání jednotlivých přístupů k řešení konstrukcí .....</b>	<b>50</b>
7.1	Porovnání dosažených výsledku na konstrukci č. 1 .....	50
7.2	Porovnání dosažených výsledku na konstrukci č. 2 .....	51
<b>8</b>	<b>Závěr.....</b>	<b>52</b>
<b>9</b>	<b>Použitá literatura.....</b>	<b>54</b>
<b>10</b>	<b>Seznam příloh .....</b>	<b>55</b>

## Seznam použitých značek a symbolů

Symbol	Význam	Jednotka
E	Modul pružnosti v tahu	[MPa]
F	Síla	[N]
G	Modul pružnosti ve smyku	[MPa]
J	Osový moment setrvačnosti plochy příčného řezu	[mm <sup>4</sup> ]
M	Ohybový moment	[N·mm]
M <sub>y</sub>	Ohybový moment působící kolem osy y	[N·mm]
M <sub>z</sub>	Ohybový moment působící kolem osy z	[N·mm]
N	Normálová síla	[N]
R	Poloměr zakřivení střednice	[mm]
$\bar{R}$	Ohmický odpor vodiče	[Ω]
R <sub>A</sub>	Reakce v bodě A	[N]
R <sub>B</sub>	Reakce v bodě B	[N]
S	Plocha průřezu	[mm <sup>2</sup> ]
T	Posouvající síla	[N]
T <sub>1,2,3</sub>	Označení tenzometrů	[-]
T <sub>S</sub>	Označení těžiště plochy	[-]
U	Elektrické napětí	[V]
U <sub>y</sub>	Statický moment plochy	[mm <sup>3</sup> ]
W	Celková energie napjatosti	[J]
W <sub>M</sub>	Energie napjatosti od ohybového momentu	[J]
W <sub>MN</sub>	Energie napjatosti od ohybového momentu, který se pootočí o úhel φ	[J]
W <sub>N</sub>	Energie napjatosti od normálové síly	[J]
W <sub>T</sub>	Energie napjatosti od posouvající síly	[J]
b	Šířka příčného řezu	[mm]
dl	Elementární délka prutu	[mm]
e	Excentricita neutrální osy vzhledem ke střednici	[mm]
h	Výška profilu	[mm]
r	Poloměr zakřivení neutrální osy	[mm]
y <sub>2</sub>	Lokální souřadnice příčného řezu kolmá ke střednici prutu	[-]
x <sub>2</sub>	Lokální souřadnice příčného průřezu tečná ke střednici prutu	[-]
Δy <sub>c</sub>	Celkové posunutí ve směru osy y	[mm]
Δy <sub>M</sub>	Posunutí ve směru osy y od ohybového momentu	[mm]



$\Delta y_N$	Posunutí ve směru osy y od normálové síly	[mm]
$\Delta y_T$	Posunutí ve směru osy y od posouvající síly	[mm]
$\Delta y_{MN}$	Posunutí ve směru osy y od ohybového momentu, který se pootočí o úhel $\varphi$	[mm]
$\Delta \sigma$	Odchylka napětí	[%]
$\beta$	Součinitel nerovnoměrného rozložení smykového napětí	[-]
$\varepsilon$	Poměrná deformace	[-]
$\mu$	Poissonovo číslo	[-]
$\rho$	Poloměr křivosti vlákna, v němž počítáme napětí	[mm]
$\sigma_{1,2}$	Hlavní napětí	[MPa]
$\sigma_M$	Normálové napětí od ohybového momentu	[MPa]
$\sigma_N$	Normálové napětí od normálové síly	[MPa]
$\sigma_P$	Napětí u přímých prutů	[MPa]
$\sigma_Z$	Napětí u silně zakřivených prutů	[MPa]
$\tau$	Smykové napětí	[MPa]
$\varphi$	Úhlová souřadnice řezu	[°]

# 1 Úvod

V řadě případů vyšetřování napjatosti zatěžované konstrukce nelze najít řešení pomocí analytického výpočtu. Jindy zase lze řešení získat, ale pouze za cenu značných zjednodušení, která získané výsledky zkreslují a znehodnocují. Proto je vhodné použít některou z metod experimentální analýzy napětí, abychom ověřili správnost analytického výpočtu a výpočtu numerického. Metod experimentální analýzy napětí existuje celá řada, ale většina z nich je založena na závislosti mezi napětím a deformací. Většinou je využíváno Hookeova zákona, a to jak v jeho jednoduché podobě, tak i v podobě rozšířené. Pro univerzální i přesná měření deformací, sil, tlaků i momentů působících na pevná tělesa se využívají tenzometry. Mezi ty dnes nejvíce používané patří odporové foliové tenzometry.

Další možností určení napjatostí a deformací je metoda konečných prvků. Posuzovaná součást je z hlediska vnitřních napětí a vnějších deformací s ohledem na vnější síly, tvar součásti a její fyzikální veličiny rozdělena na konečný počet prvků – elementů, které jsou definovány svým tvarem, počtem uzlů a počtem stupňů volnosti každého uzlu. Zatížení těchto prvků vede v konečném důsledku k řešení řady rovnic a metoda konečných prvků je nejvýznamnější numerickou metodou, založenou právě na řešení soustavy rovnic, popisujících model součásti, jeho vlastnosti a zatížení. Využití analytického řešení spolu s numerickým řešením může vést k minimalizaci možných chyb při výpočtu.

V této bakalářské práci je provedeno tenzometrické měření dvou konstrukcí křivých prutů. Konstrukce jsou zatěžovány v upínacím přípravku, který byl pro účely toho měření upraven. Dále je provedeno analytické řešení konstrukce s konstantním průřezem podle teorie slabě zakřivených prutu a podle teorie silně zakřivených prutů. Výsledky získané měřením a analytickým výpočtem jsou porovnány s MKP – napětíově – deformační analýzou provedenou v programu ANSYS 12.1.

## 2 Prut v pružnosti a pevnosti

Prut v pružnosti a pevnosti je teoretickým modelem reálného tělesa z hlediska napjatosti a deformace a je modelem nejjednoduššího typu. Prut je tedy teoretické těleso, které splňuje jisté geometrické, deformační a napjatostí předpoklady [1].

### 2.1 Prutové předpoklady

#### a) Geometrické předpoklady

Prut je určen střednicí a v každém bodě střednice příčným průřezem, kde střednice je spojitá hladká a její délka je alespoň stejně velká jako největší rozměr příčného průřezu. Příčný průřez je spojitá jedno nebo vícenásobně souvislá oblast ohraničená obrysem [1].

#### b) Předpoklady vazbové a zatěžovací

Vazby omezují pouze posuvy a uhly natočení střednice. Zatížení je soustředěno na střednici, kde jsou zatížením osamělé a liniové síly a silové dvojice s působištěm na střednici [1].

#### c) Předpoklady deformační

Střednice je i v procesu zatěžování spojitá a hladká. Příčné průřezy jsou v procesu zatěžování příčné, tedy zachovávají si rovinnost [1].

#### d) předpoklady napjatostí

Napjatost v prutu je určena normálovým a smykovým napětím v jeho příčném průřezu. Jde o zvláštní typ napjatosti, který budeme označovat jako prutová napjatost. [1].

### 2.2 Rozdělení prutů

Pruty v pružnosti a pevnosti můžeme rozdělit do mnoha skupin podle různých hledisek, z nichž ty nejdůležitější budou v této kapitole uvedeny.

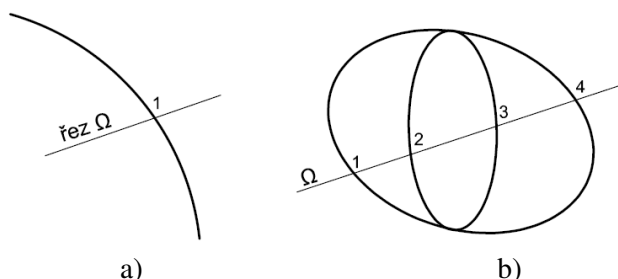
#### 2.2.1 Hledisko geometrie prutu

##### a) podle křivosti střednice

- pruty přímé
- pruty křivé
  - rovinné (střednice je tvořena rovinnou křivkou)
  - prostorové (střednice je tvořena prostorovou křivkou)

**b) podle uzavřenosti střednice**

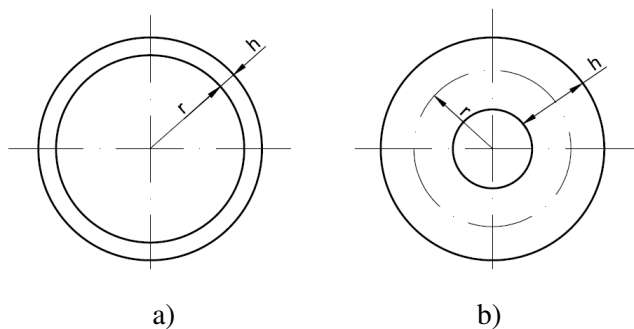
- otevřené: prut lze rozdělit na dva prvky řezem vedeným právě jedním bodem střednice, Obr. 1a,
- uzavřené: (n-krát) prut lze rozdělit na dva prvky řezem vedeným právě (n+1) body střednice, Obr. 1b.



*Obr. 1: Pruty uzavřené a otevřené*

**c) podle poměru charakteristického rozměru příčného průřezu k poloměru křivosti střednice prutu**

- pruty slabě zakřivené: pokud platí kritérium  $r/h > 5$  napětí a deformaci lze řešit jako u přímých prutů, Obr. 2a,
- pruty silně zakřivené: rovinnost řezů je zachována, avšak napjatost a deformaci musíme řešit podle teorie silně zakřivených prutů, Obr. 2b.



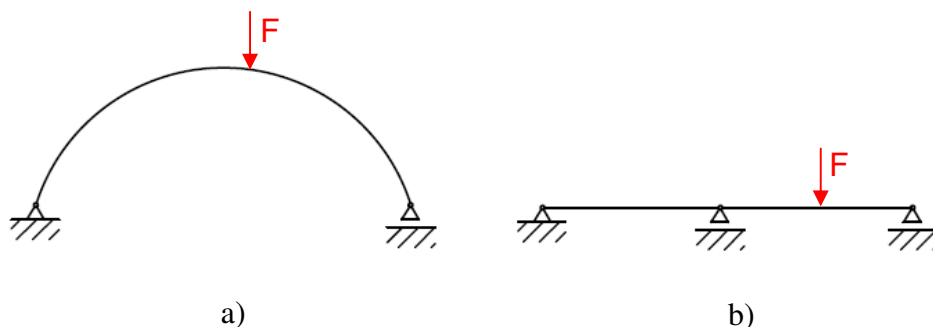
*Obr. 2: Pruty silně a slabě zakřivené*

**d) podle proměnnosti průřezu podél střednice**

- konstantního průřezu
  - tvar i rozměry příčného průřezu se podél střednice nemění,
- proměnného průřezu
  - tvar nebo rozměry příčného průřezu se podél střednice mění spojitě,
  - v malé části střednice se výrazně mění průřez,
  - skokem.

### 2.2.2 Hledisko vazeb

- a) pruty volné
- b) pruty vázané
  - staticky určité, Obr. 3a,
  - staticky neurčité, Obr. 3b.



Obr. 3: Pruty staticky určité a neurčité

### 2.2.3 Hledisko zatížení

- pruty zatížené jednoduše
- pruty zatížené kombinovaně

## 2.3 Napjatost prutů

Napjatost v bodě prutu je určena normálovým a smykovým napětím jak bylo uvedeno v kapitole 2.2 - prutové předpoklady. Ostatní složky napětí jsou nulové. Napjatost prutů budeme dále rozdělovat na napjatost přímých prutů a napjatost křivých prutů.

### 2.3.1 Napjatost přímých prutů

Přímý prut je definován přímkou střednicí, kde každému bodu střednice přísluší v normálové rovině příčný průřez s těžištěm ležícím právě na střednici. Základní typy namáhání takto definovaného prutu jsou:

#### Normálové napětí od normálové síly – tah a tlak

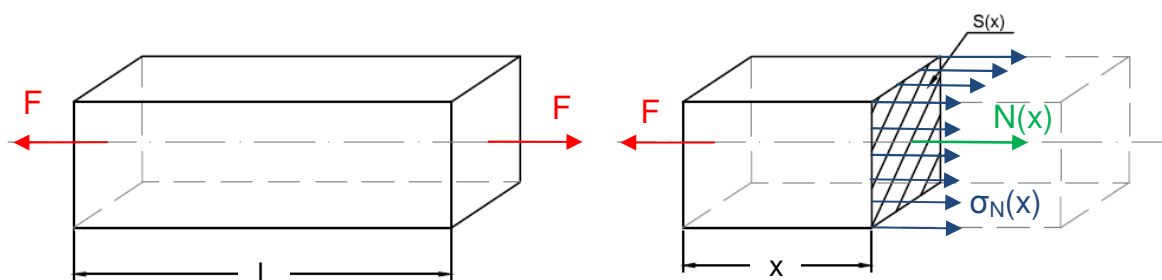
Tah a prostý tlak jsou stavy napjatosti, které odporují podélnému silovému zatížení. Po uvolnění a zavedení vazbových reakcí můžeme napsat rovnici rovnováhy ve tvaru:

$$N(x) - F = 0 \rightarrow N(x) = F. \quad (2.1)$$

Na základě St. Vénantova principu lze normálové napětí vyjádřit rovnicí:

$$\sigma_N(x) = \frac{N(x)}{S(x)}, \quad (2.2)$$

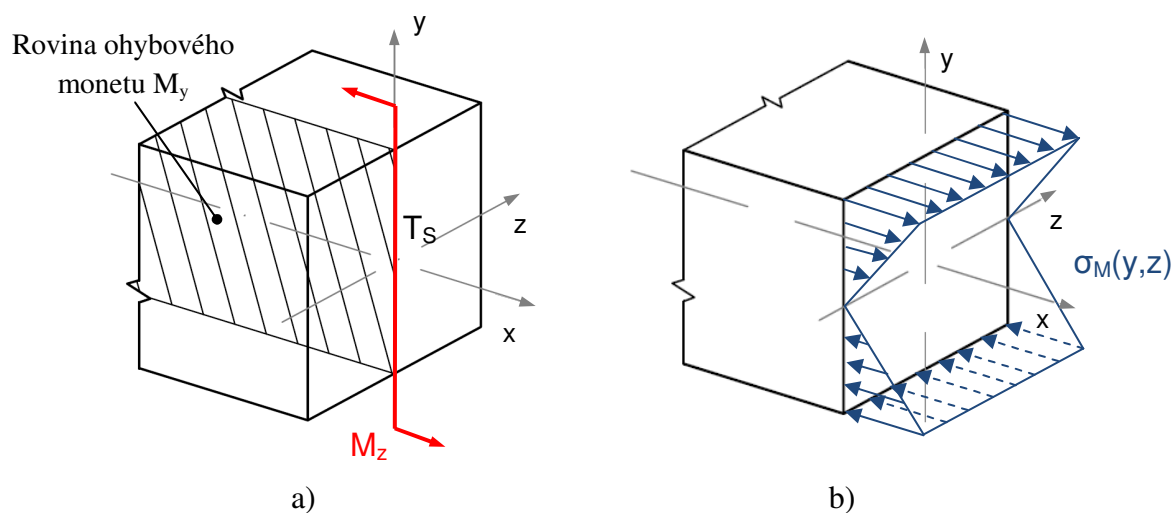
kde na Obr. 4 je znázorněno normálové napětí působící v řezu  $S(x)$ .



Obr. 4: Normálové napětí od normálové síly

### Normálové napětí od ohybového momentu- rovinný ohyb

Rovinný ohyb nastane v případě, že rovina zátěžných momentů obsahuje podélnou osu prutu a jednu z hlavních centrálních os příčného průřezu jak je zobrazeno na Obr. 5a. U rovinného ohybu jsou napětí a deformace v příčném průřezu rozloženy podle zákona roviny jako je tomu na Obr. 5b [2].



Obr. 5: Normálové napětí od ohybového momentu

Velikost napětí a poměrné deformace jsou přímo úměrné vzdálenosti od neutrální osy a stanoví se podle následujících vzorců:

$$\sigma_M(y, z) = \frac{M_z}{J_z} y, \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_M(y, z) = \frac{M_z}{J_z \cdot E} y. \quad (2.4)$$

### Smykové napětí od posouvající síly

Posouvající síla je kolmá ke střednici prutu a vyvolává v bodě příčného průřezu smykové napětí, které počítáme z Žuravského rovnice. Tato rovnice dává výsledky s dobrou přesností, pro  $h/b > 2$  [2].

Není – li obrysová čára plochy příčného průřezu rovnoběžná s hlavní centrální osou je smykové napětí dáno vztahem:

$$\tau_{xy(y)} = \frac{T_y \cdot U_y}{J_y b_{(y)}}, \quad (2.5)$$

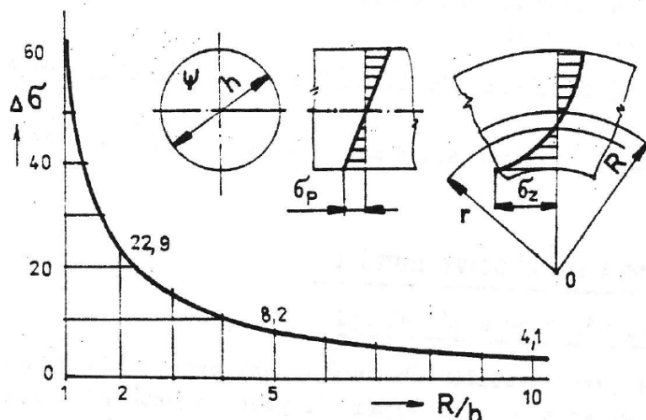
kde, pro obdélníkový průřez můžeme vztah (2.5) psát ve tvaru:

$$\tau_{xy(y)} = \frac{3 \cdot T_y}{2 \cdot h b_{(y)}}. \quad (2.6)$$

Vztahy (2.1 – 2.6) jsou podrobně rozebrány v literatuře [2].

### 2.3.2 Napjatost křivých prutů

Napjatost slabě zakřivených prutů, pro které platí  $R/h > 5$  lze řešit pomocí vztahů pro přímé pruty, které jsou uvedeny v kapitole 2.3.1.



Obr. 6: Závislost změny napětí na poměru  $R/h$  u křivých prutů [1]

Rozčlenění prutů na slabě a silně zakřivené souvisí s rozlišovací úrovní určování napětí. Na Obr. 6 je znázorněna závislost poměru  $R/h$  charakterizující geometrii prutu a veličinu  $\Delta\sigma$ , charakterizující odchylku napětí  $\sigma_z$  stanovenou podle vztahu pro silně zakřivené pruty od napětí  $\sigma_p$  stanoveného ze vztahu (2.3) pro pruty přímé [1].

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_z - \sigma_p}{\sigma_z} \cdot 100 [\%]. \quad (2.7)$$

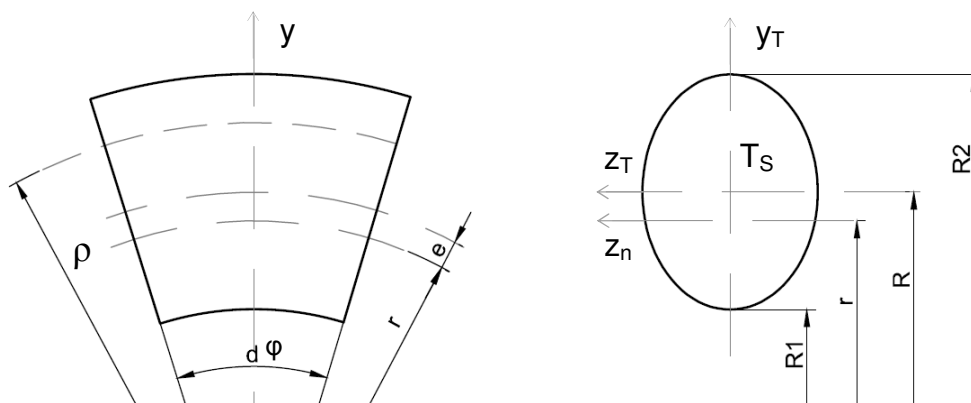
Při poměru:  $R/h = 10$  je  $\Delta\sigma = 4,1 \%$ , při  $R/h = 5$  je  $\Delta\sigma = 8,2 \%$ .

## Napjatost silně zakřivených prutů

Napětí od normálových sil a posouvajících sil se řeší pomocí vztahů pro slabě zakřivené pruty (2.2, 2.3, 2.5).

### Normálové napětí od ohybového momentu

U silně zakřivených prutů je neutrální osa  $z_N$  posunuta o hodnotu  $e$  vůči hlavní centrální ose  $y_T$  vždy ke středu křivosti střednice prutu jak je uvedeno na Obr. 7. Normálové napětí je tedy nulové na ose  $z_N$  a mění se nelineárně se vzdáleností  $y$  [3].



Obr. 7: Posunutí neutrální osy

Napětí od ohybového momentu se spočítá podle výrazu:

$$\sigma_M = \frac{M_z \cdot y}{S \cdot e \cdot \rho}. \quad (2.8)$$

Poloměr křivosti neutrální osy vypočteme jako:

$$r = \frac{S}{\int_s \frac{dS}{\rho}}. \quad (2.9)$$

Excentricita osy se vypočítá jako:

$$e = r - R. \quad (2.10)$$

Vztah pro výpočet ohybového momentu u silně zakřivených prutů (2.8) se od vztahu pro výpočet ohybového momentu u přímých prutů (2.3) liší pouze ve jmenovateli, kde je u prutů přímých  $J_z$ , kdežto u silně zakřivených prutů  $S \cdot e \cdot \rho$ .

Odvození vztahů (2.8, 2.9) je uvedeno v literatuře [3].



## 2.4 Energie napjatosti prutů

V lineární pružnosti se celá deformační práce mění na pružnou energii napjatosti.

### 2.4.1 Energie napjatosti slabě zakřiveného prutu

Energii napjatosti akumulovanou v slabě zakřiveném prutu můžeme zapsat jako:

$$W = W_M + W_T + W_N, \quad (2.11)$$

Kde jednotlivé složky energie napjatosti akumulované v prutu jsou:

- Energie napjatosti od ohybového momentu:

$$W_M = \frac{1}{2EJ} \int_{(l)} M^2 dl. \quad (2.12)$$

- Energie napjatosti od posouvající síly:

$$W_T = \frac{\beta}{2GS} \int_{(l)} T^2 dl. \quad (2.13)$$

- Energie napjatosti od normálové síly:

$$W_N = \frac{1}{2ES} \int_{(l)} N^2 dl, \quad (2.14)$$

kde:

$\beta$  – součinitel vyjadřující vliv nerovnoměrně rozloženého smykového napětí na deformační energii nahromaděnou v objemu od posouvající síly  $T$  (pro obdélníkový průřez  $\beta = 6/5$ ),

$J$  – osový moment setrvačnosti plochy příčného průřezu (pro obdélníkový průřez nabývá hodnoty:  $J = bh^3/12$ ).

### 2.4.2 Energie napjatosti silně zakřivených prutů

Příspěvek energie napjatosti akumulované v silně zakřiveném prutu od posouvající síly a od normálové síly zůstává stejný jako pro slabě zakřivený prut (2.12-13).

- Energie napjatosti od ohybového momentu je u silně zakřivených prutů:

$$W_M = \frac{1}{2ESR_e} \int_{(l)} M^2 dl. \quad (2.15)$$

- Energie napjatosti od ohybového momentu, který se pootočí o uhel  $\varphi$  je:

$$W_{MN} = \frac{1}{ESR} \int_{(l)} MN dl. \quad (2.16)$$

Vztahy (2.11 – 2.16) jsou uvedeny v literatuře [4].

### 3 Tenzometrie

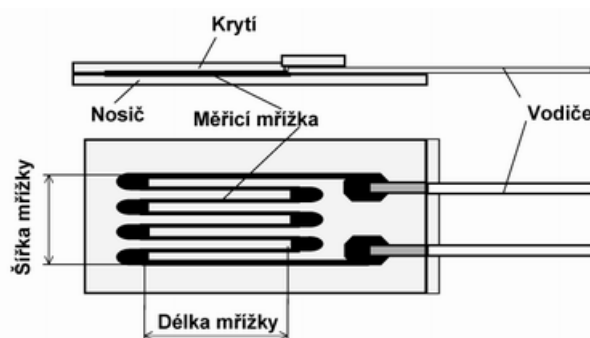
Tenzometrické metody jsou založeny na měření změny vzdálenosti dvou bodů tělesa v důsledku změny jeho zatížení a čidla, umožňující tato měření se nazývají tenzometry. Tenzometry slouží k měření prodloužení (zkrácení) délky měřené součásti, případně k měření sil.

#### 3.1 Elektrické odporové tenzometry

Princip měření pomocí elektrických odporových tenzometrů je založen na závislosti změny elektrického odporu vodiče na jeho mechanické deformaci. Podle druhu odporového materiálu lze tyto tenzometry rozdělit na [5]:

- Uhlíkové
- Polovodičové
- Kovové
  - Drátkové
  - Fóliové

Z nichž nejčastěji dnes používané jsou fóliové tenzometry. Vyrábí se celá řada foliových tenzometrů pro různé účely, pro měření různě tvarovaných objektů a působení sil z různých směrů. Základní klasické provedení jednoduchého foliového tenzometru je uvedeno na Obr. 8.



Obr. 8: Jednoduchý Fóliový tenzometr

Na nosné izolační vrstvě (nosič) obdélníkového tvaru tloušťky cca 20 až 50  $\mu\text{m}$ , je upevněna měřicí mřížka o tloušťce 3 až 6  $\mu\text{m}$ , určité délky, šířky a klidového odporu  $\bar{R}$  (obvykle 100, 120, 350, 700 nebo 1000  $\Omega$ ). Na povrchu je senzor pokryt krycí vrstvou tloušťky okolo 30  $\mu\text{m}$  a vyvedeny jsou buď pájitelné svorkovnice, nebo již přímo vodiče. Životnost bývá obvykle přes 10 miliónů cyklů deformace, která se pohybuje do 0.5% rozměrů tenzometru.

### 3.1.1 Princip měření elektrickými odporovými tenzometry

Ohmický odpor vodiče  $\bar{R}$  v závislosti na jeho délce  $l$ , ploše  $S$  a měrném odporu materiálu vodiče  $\rho$  je dán vztahem:

$$\bar{R} = \rho \frac{l}{S}. \quad (3.1)$$

Uvažujeme – li všechny veličiny během deformace jako proměnné, pak pro totální diferenciál funkce (3.1) platí:

$$d\bar{R} = \frac{l}{S} d\rho + \frac{\rho}{S} dl - \frac{\rho l}{S^2} dS. \quad (3.2)$$

Odtud pak pro určitou konečnou změnu odporu  $\bar{R}$ :

$$\frac{\Delta \bar{R}}{\bar{R}} = k \cdot \varepsilon, \quad (3.3)$$

kde konstanta  $k$  v rovnici (2.18) se nazývá  $k$ -faktor, který se zjišťuje experimentálně cejchovním měřením. Pro většinu tenzometrů bývá  $k \cong 2$  [5].

### 3.2 Způsoby zapojení tenzometrů do můstku

Změna odporu je velmi malá, běžným ohmmetrem neměřitelná, k jejímu vyhodnocení se proto používá můstkového zapojení. Aktivní, kompenzační i konstantní odpory můžeme v můstku zapojit různými způsoby [5].

**Čtvrtmůstek** s jedním aktivním tenzometrem. Další tři odpory mohou být tvořeny kompenzačními tenzometry, jedním kompenzačním a dvěma pevnými odpory v aparatuře nebo třemi pevnými odpory v aparatuře. Pro výstupní signál ze čtvrtmůstku platí vztah:

$$U_m = \frac{U_B}{4} \cdot \frac{\Delta \bar{R}_1}{\bar{R}_{1,0}} = \frac{U_B}{4} \cdot k \cdot \varepsilon_1. \quad (3.4)$$

**Půlmůstek** je tvořen dvěma aktivními tenzometry a zbývající dva odpory mohou být buď kompenzační tenzometry nebo pevné v aparatuře. Pro výstupní signál z můstku platí vztah:

$$U_m = \frac{U_B}{2} \cdot \frac{\Delta \bar{R}_1}{\bar{R}_{1,0}} = \frac{U_B}{2} \cdot k \cdot \varepsilon_1. \quad (3.5)$$

**Celý můstek** tvoří čtyři aktivní tenzometry a pro výstupní signál platí vztah:

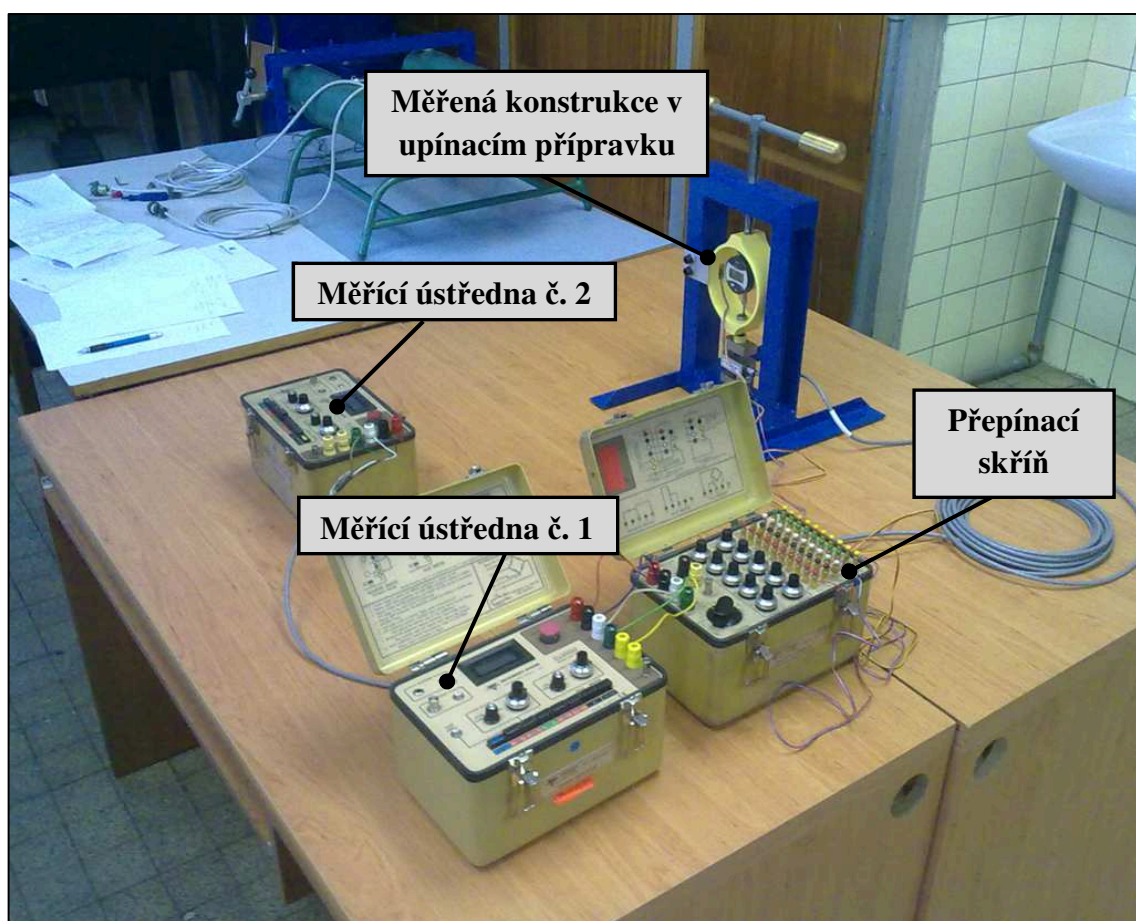
$$U_m = U_B \cdot \frac{\Delta \bar{R}_1}{\bar{R}_{1,0}} = U_B \cdot k \cdot \varepsilon_1. \quad (3.6)$$

## 4 Experimentální měření

Cílem experimentálního měření bylo zjistit poměrné deformace ve vybraných místech měřených konstrukcí pomocí tenzometrů a stlačení vlivem zatížení vyvozeného v upínacím přípravku. Měření bylo provedeno v laboratoři Katedry pružnosti a pevnosti.

### 4.1 Zapojení měřícího obvodu

Protože je použita měřicí ústředna pro měření mechanické deformace pouze jednokanálová musí se vývody jednotlivých tenzometrů propojit nejprve s přepínací skříní a teprve přepínací skříní propojit s měřicí ústřednou. Po zapojení aparatury postupně volíme kanály jednotlivých tenzometrů a provádíme jejich vynulování. Snímač síly je zapojen k vlastní měřicí ústředně a před zatížením je vynulován. Tenzometry nalepené na konstrukci jsou zapojeny do čtvrtmůstku a snímač síly je zapojen do můstku celého. Celá měřicí sestava je zobrazena na Obr. 9.



Obr. 9: Měřicí sestava

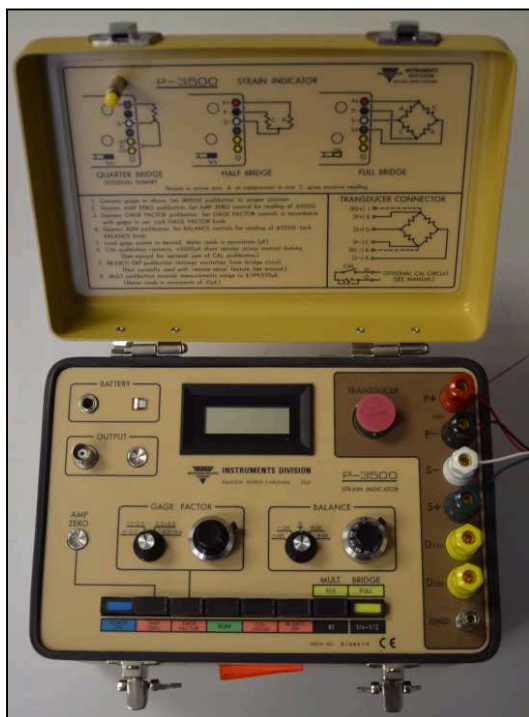
## 4.2 Popis použitého zařízení a přístrojů

- **Měřicí ústředna P -3500, Vishay**

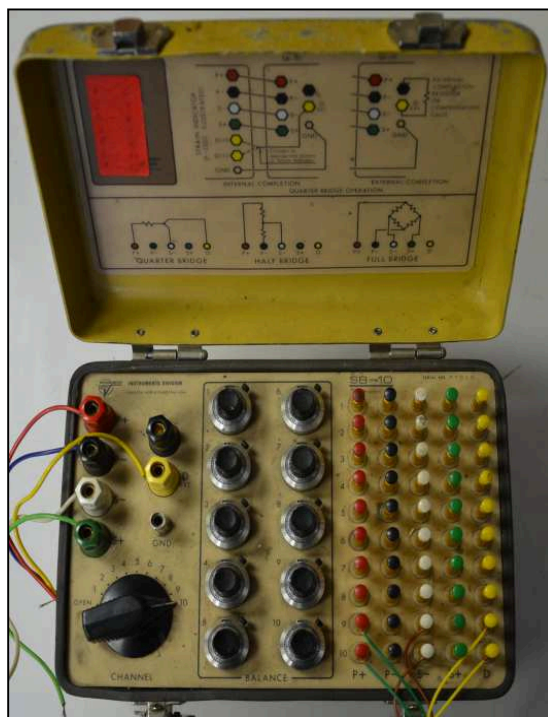
Jedná se o přenosnou, jednokanálovou bateriově napájenou měřicí ústřednu, která je zobrazena na Obr. 10. Tato tenzometrická základna, slouží k statickodynamickým měřením mechanické deformace pomocí tenzometrů. Díky vestavěným tenzometrům umožňuje měření s jedním tenzometrem (čtvrtmůstek, pro tenzometr s odporem 120/1000 $\Omega$  nebo 350 $\Omega$ ) se dvěma tenzometry (půlmůstek) nebo s plným mostem. Přístroj umožňuje přesné nastavení k – faktoru a pracuje s rozlišením 1  $\mu$ S (microstrain). Podrobnější informace jsou uvedeny na webových stránkách výrobce [7].

- **Přepínací skříň SB -10, Vishay**

Tato přepínací skříň SB – 10 zobrazená na Obr. 11 je určena k propojení s jednokanálovou měřicí ústřednou P – 3500, kterou dokáže rozšířit až na deset kanálů. Propojení těchto dvou přístrojů umožňuje obsluhu kombinovat tenzometry zapojené do čtvrtmůstku, půlmůstku a plného mostu a libovolně mezi nimi přepínat. Při použití přepínací skříně je pak možné požit jiné tenzometry než s odporem 120 $\Omega$  a 350 $\Omega$ . Podrobnější informace jsou uvedeny na webových stránkách výrobce [7].



Obr. 10: Měřicí ústředna P - 3500



Obr. 11: Přepínací skříň SB - 10

- **Snímač síly LCM101-1K**

Snímač síly LCM101 – 1K od firmy Omega [8] s plným tenzometrickým mostem je zobrazen na Obr. 12. Snímač je v provedení s kabelem a na obou stranách je opatřen závity pro uchycení do zařízení. Umožňuje měření v tlaku nebo v tahu s rozsahem  $\pm 4454\text{ N}$  a s přesností  $\pm 0,03\%$  z rozsahu. Celková konstrukce je vhodná pro průmyslové aplikace. Bližší specifikace (viz příloha – A).



*Obr. 12: Snímač síly LCM101 – 1K [7]*

- **Digitální úchylkoměr mahr millitast 1075**

Úchylkoměr mahr millitast 1075 [9] uvedený na Obr. 13 zobrazuje hodnoty na LCD displeji s rozlišením 0,01 mm a měří v rozsahu 0 – 12,5 mm. Mezní chyba úchylkoměru je 0,03 mm. Umožňuje také propojení s USB.

- **Digitální posuvné měřítko 16 ER**

Digitální posuvné měřítko od firmy Mahr [9] zobrazené na Obr. 14 měří v rozsahu 0 – 150 mm s přesností 0,01mm.



*Obr. 13: Digitální úchylkoměr Mahr millitast 1075 [8]*

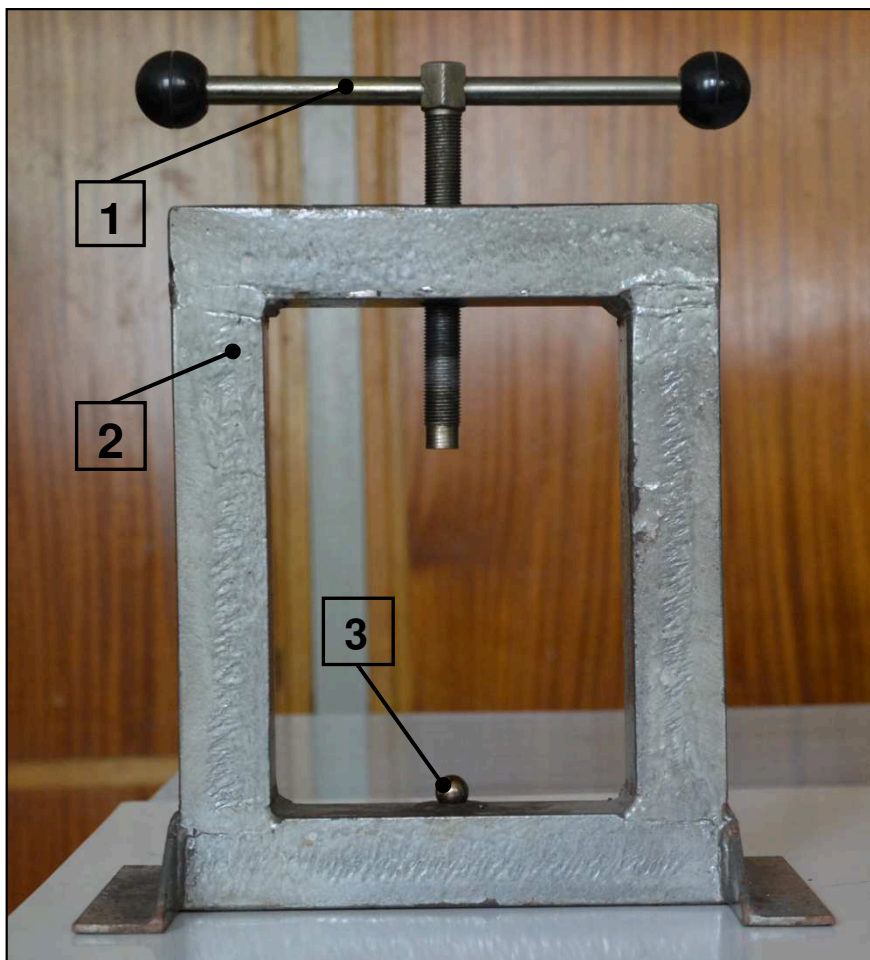


*Obr. 14: Digitální posuvné měřítko 16 ER [8]*



### 4.3 Úprava upínacího přípravku

Původní konstrukce přípravku byla vyrobena pouze pro účel měření velikosti stlačení jednoduchého ocelového kroužku, který se umístil v dolní části přípravku na ocelovou kuličku, a nahoře byl pak přes druhou ocelovou kuličku stlačován utahovací pákou.

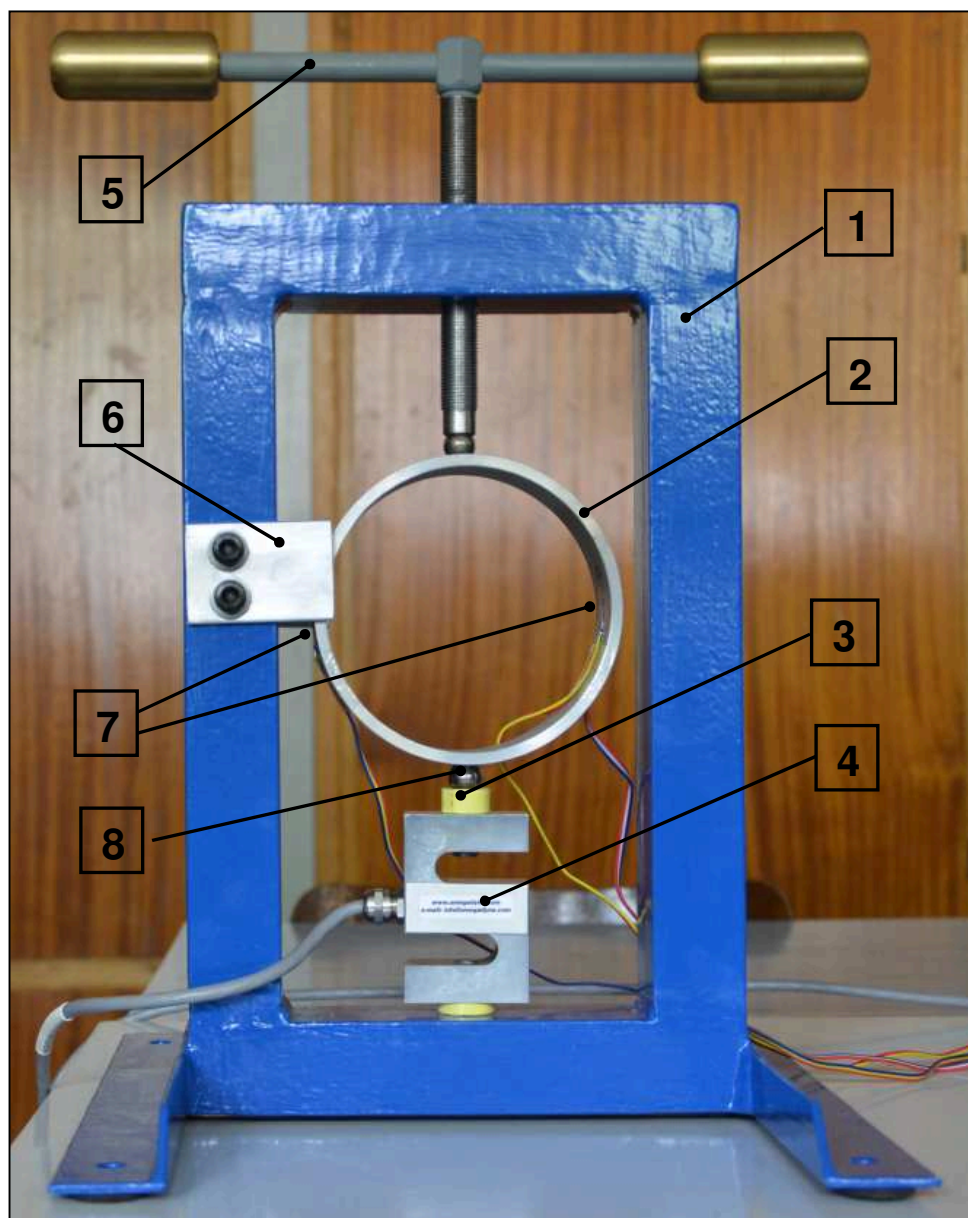


*Obr. 15: Původní konstrukce upínacího přípravku*

*1 – utahovací páka, 2 – rám, 3 – ocelová kulička*

Přípravek je tvořen ocelovým rámem (2), který má dole uprostřed vytvořené sedlo pro usazení ocelové kuličky (3). V horní části je utahovací páka (1) se závitem vedená rámem.

Konstrukce původního přípravku zobrazeného na Obr. 15 byla pro účel tohoto měření upravena do podoby na Obr. 16. Protože se pomocí původního přípravku měřilo pouze stlačení byl vytvořen přípravek nový, který umožňuje navíc měření zatěžující síly (reakce) a pro měření poměrných deformací byla měřená konstrukce opatřena tenzometry.



*Obr. 16: Nový upínací přípravek*

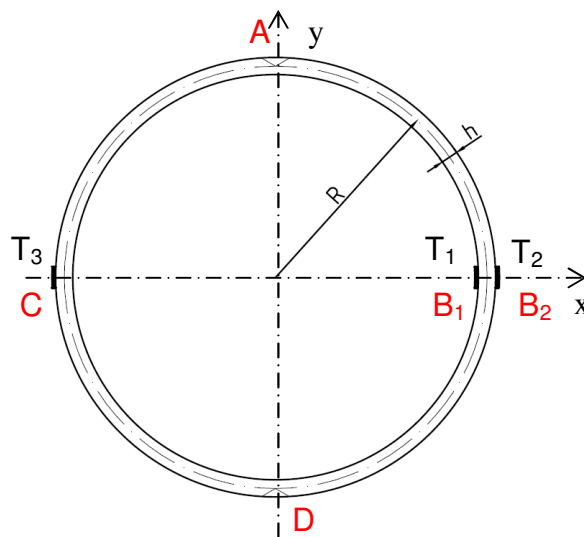
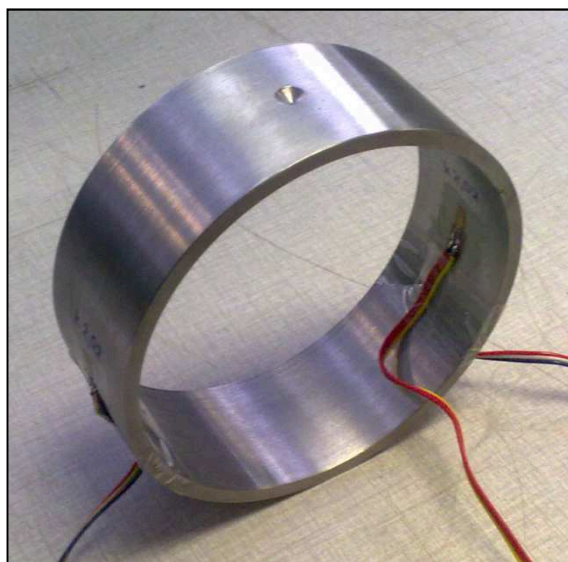
*1 – rám, 2 – měřená konstrukce, 3 – podložka, 4 – snímač síly, 5 – utahovací páka, 6 – svorky, 7 – foliové tenzometry, 8 - ocelová kulička*

Tělo nového přípravku tvoří ocelovým rámem (1) natřený modrou barvou, ve kterém je dole pomocí šroubu uchycen snímač síly (4). Ocelový rám je osazen svorkami (6), které zabraňují natáčení měřené konstrukce. V horní části rámu je vedena utahovací páka (5), která prostřednictvím šroubového mechanismu upíná konstrukci a také vyvozuje zatížení. Měřená konstrukce je nahoře stlačována pákou přes ocelovou kuličku a dole je konstrukci zabráněno v pohybu druhou ocelovou kuličkou (8) usazenou v podložce (3), která je pevně přišroubována ke snímači reakční síly.



#### 4.4 Měření konstrukce č. 1

Za účelem srovnání experimentálního měření s analytickým výpočtem a MKP napětově - deformační analýzou byla vyrobena jednoduchá ocelová konstrukce tvaru prstence s konstantním obdélníkovým průřezem ( $h = 4,9 \text{ mm}$ ,  $b = 46 \text{ mm}$ ) o poloměru střednice  $R = 60 \text{ mm}$ , která je zobrazená na Obr. 17. Na konstrukci jsou vyvrtány dva středící důlky v místě A a v místě D, pro usazení ocelových kuliček.

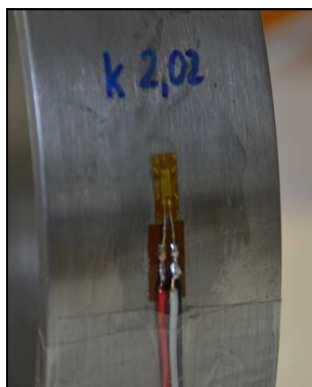


Obr. 17: Konstrukce č. 1

Na konstrukci jsou nalepeny tři tenzometry v místech, kde známe směr hlavního napětí. Z tohoto důvodu byly použity jednoduché foliové tenzometry typu **3/120LY11**, od firmy HBM [10], s  $k$  – faktorem 2,02. (Podrobný popis tenzometrů je uveden příloze B).



a)



b)



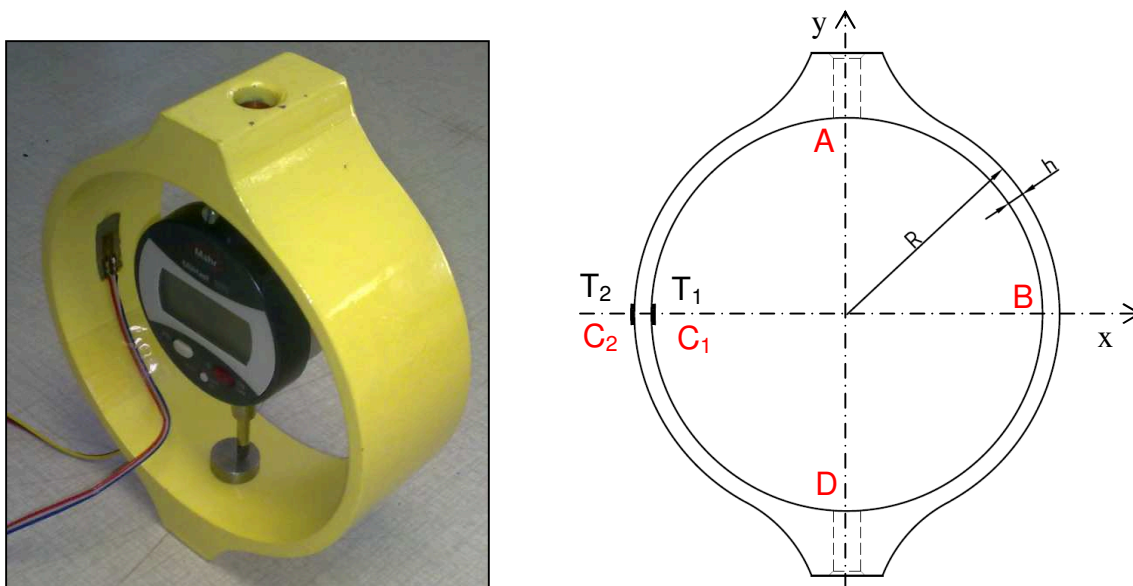
c)

Obr. 18: Umístění tenzometrů – konstrukce č. 1

Tenzometr  $T_1$  je nalepený na vnitřním průměru místě  $B_1$  (Obr. 18.a). Tenzometry  $T_2$  a  $T_3$  jsou nalepené na vnějším průměru v místech  $B_2$  a  $C$  (Obr. 18.b, c).

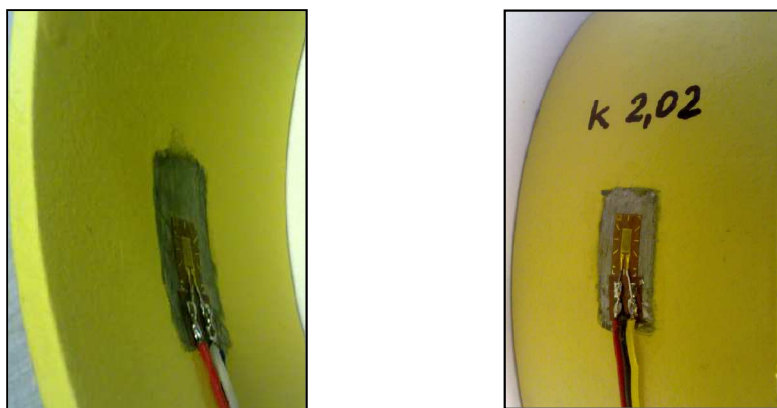
## 4.5 Měření konstrukce č. 2

Tato konstrukce zobrazená na Obr. 19 má zesílení výšky profilu v oblasti upevnění do přípravku, nahoře v místě *A* a dole v místě *B*. V těchto zesíleních je konstrukce provrtána dírou. Tyto díry jsou určeny jednak pro usazení ocelových kuliček jako tomu je u konstrukce č. 1, ale také k upevnění kovových čepů s plochou hlavou, mezi které se umístí digitální úchylkoměr uvedený na Obr. 13. Úchylkoměr měří posunutí bodu *A* ve směru osy *y*. Konstrukce má v části s konstantním průřezem výšku profilu  $h = 5 \text{ mm}$ , poloměr  $R = 62,5 \text{ mm}$ . Šířka konstrukce  $b = 46 \text{ mm}$  je konstantní po celé délce.



Obr. 19: Konstrukce č.2

Na konstrukci jsou nalepeny dva jednoduché foliové tenzometry typu **3/120LY11**, od firmy HBM [10] v místech  $C_1$  a  $C_2$ , opět na vnitřních a vnějších vláknech (Obr. 20.a,b),  $k$  – faktor tenzometrů je 2,02. (Podrobný popis tenzometrů je uveden v příloze B)



a) b)  
Obr. 20: Umístění tenzometrů – konstrukce č. 2

## 4.6 Výsledky měření

### 4.6.1 Konstrukce č. 1

Zatížení bylo vyvozeno vlivem utahení páky na upínacím přípravku zobrazeného na Obr. 16. Měření konstrukce bylo provedeno třikrát vždy pro jinou hodnotu zatížení. Snímač síly je zapojen do plného můstku platí tedy vztah pro výstupní signál (3.6), kde pro  $k$ -faktor ( $k = 2$ ) a pro hodnoty uvedené v kalibračním listu (viz Příloha – A), je převod mezi poměrnou deformací a silou dán vztahem (4.1), kde naměřená síla v  $\mu S$  uvedena v tab.1 se pomocí toho vztahu převede na sílu v  $N$  uvedenou v tab.2.

$$F[N] = 1,6325 \cdot \varepsilon[\mu S] \quad (4.1)$$

Zátěžový stav	Síla [ $\mu S$ ]
1	491
2	754
3	1232

tab. 1: Naměřená síla

Zátěžový stav	Síla [ $N$ ]
1	802
2	1231
3	2011

tab. 2: Přepočtená síla

Naměřené deformace a posunutí bodu A v záporném směru osy  $y$  jsou uvedeny v tab. 3.

Výsledky měření	Zátěžový stav		
	1	2	3
Změřené deformace $\varepsilon_1$ tenzometrem $T_1$ [ $\mu S$ ]	-254	-390	-645
Změřené deformace $\varepsilon_2$ tenzometrem $T_2$ [ $\mu S$ ]	198	304	502
Změřené deformace $\varepsilon_3$ tenzometrem $T_3$ [ $\mu S$ ]	199	306	504
Posunutí bodu A [mm]	0,26	0,41	0,68

tab. 3: Naměřené hodnoty pro jednotlivé zátěžové stavy – konstrukce č. 1

Naměřené deformace se musí převést na napětí, a protože je v místech měření jednoosá napjatost můžeme aplikovat Hookeův zákon pro jednoosou napjatost a vypočítat tak přímo velikosti hlavních napětí. Příklad výpočtu napětí z naměřených deformací tenzometrem  $T_1$ , pro modul pružnosti v tahu  $E = 2.1 \cdot 10^5$  MPa:

$$\sigma_{B1} = E \cdot \varepsilon = 2.1 \cdot 10^5 \cdot (-254 \cdot 10^{-6}) = -53,3 \text{ MPa} \quad (4.2)$$

Přepočtené hodnoty deformací na napětí jsou uvedeny v tab. 4.

Vypočtené hodnoty	Zátěžový stav		
	1	2	3
Hlavní napětí na vnitřních vláknech $\sigma_{B1}$ [MPa]	-53,3	-81,9	-135,5
Hlavní napětí na vnějších vláknech $\sigma_{B2}$ [MPa]	41,6	63,8	105,4
Hlavní napětí na vnějších vláknech $\sigma_C$ [MPa]	41,8	64,3	105,8
Posunutí bodu A [mm]	0,27	0,41	0,68

tab. 4: Vypočtené hodnoty napětí pro jednotlivé zátěžové stavy – konstrukce č. 1

#### 4.6.2 Konstrukce č. 2

Pro konstrukci č. 2 jsou použity stejné zátěžové stavy, jako pro konstrukci č. 1 viz tab. 2, kde výsledky pro tato zatížení jsou vedeny v tab. 5.

Výsledky měření	Zátěžový stav		
	1	2	3
Změřené deformace $\varepsilon$ tenzometrem $T_1$ [ $\mu S$ ]	-162	-249	-754
Změřené deformace $\varepsilon$ tenzometrem $T_2$ [ $\mu S$ ]	124	190	313
Posunutí bodu A [mm]	0,09	0,14	0,24

tab. 5: Naměřené hodnoty pro jednotlivé zátěžové stavy – konstrukce č. 2

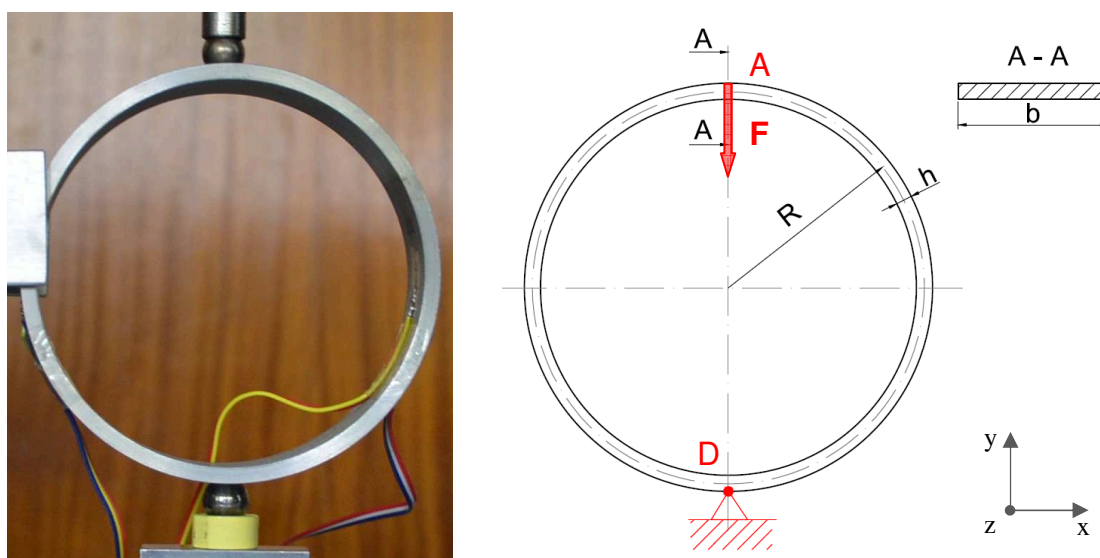
Přepočet z naměřených deformací je proveden stejně jako u konstrukce č. 1 a výsledky jsou uvedeny v tab. 6.

Vypočtené hodnoty	Zátěžový stav		
	1	2	3
Hlavní napětí na vnitřních vláknech $\sigma_{c1}$ [MPa]	-34,0	-52,3	-86,1
Hlavní napětí na vnitřních vláknech $\sigma_{c2}$ [MPa]	26,0	39,9	65,7
Posunutí bodu A [mm]	0,09	0,14	0,24

tab. 6: Vypočtené hodnoty napětí pro jednotlivé zátěžové stavy – konstrukce č. 2

## 5 Analytické řešení

V této kapitole bude řešena pouze konstrukce č. 1. Důvodem je obdélníkový průřez, který se po délce kroužku nemění, bude tak možno provést srovnání s tenzometrickým měřením a s MKP napětově – deformační analýzou. Analytický výpočet bude proveden podle teorie slabě zakřivených prutů a podle teorie silně zakřivených prutů. Střednici kroužku tvoří uzavřená rovinná křivka, jedná se tedy o uzavřený prut. Uzavřený prut je obecně třikrát staticky neurčitý. Z experimentálního je patrné, že konstrukce č. 1 zobrazená na Obr. 21 je zatížena silou  $F$  v bodě  $A$ , a dole uložena v bodě  $D$  pevnou podporou.



Obr. 21: Fotografie a schéma konstrukce č. 1

Konstrukce byla důkladně proměřena digitální posuvkou (Obr. 14) a její rozměry byly uvedeny v tab. 7. Úloha je vypočtena pro sílu  $F = 2011 \text{ N}$ , tedy pro poslední zatížení podle experimentálního měření.

Vnější průměr $D$ [mm]	124,9
Výška profilu $h$ [mm]	4,9
Šířka profilu $b$ [mm]	46
Poloměr křivosti střednice $R$ [mm]	60
Plocha příčného řezu $S$ [mm <sup>2</sup> ]	225,4
Osový moment setrvačnosti plochy $J_z$ [mm <sup>4</sup> ]	450,98
Modul pružnosti v tahu $E$ [MPa]	$2,1 \cdot 10^5$
Modul pružnosti ve smyku $G$ [MPa]	$8,07 \cdot 10^4$
Poissonovo číslo $\mu$ [-]	0,3

tab. 7: Vstupní hodnoty

## 5.1 Řešení konstrukce jako slabě zakřivený prut

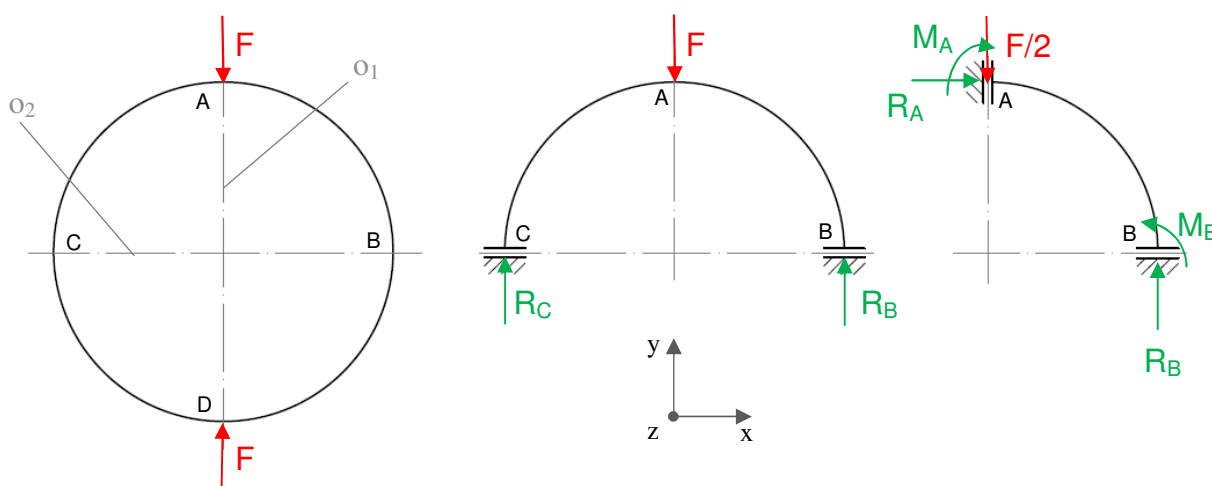
Kritérium pro řešení podle teorie slabě zakřivených prutů je:

$$\frac{R}{h} = \frac{115,1}{4,9} = 11,7 \gg 5. \quad (5.1)$$

Můžeme tedy řešit úlohu jako tenký křivý prut, který je definován svou středicí. V tomto případě je střednicí rovinná křivka (kružnice) o poloměru  $R$ . Prut je zatěžován dvěma silami  $F$  stejné velikosti opačné orientace, kde síla působící v bodě  $A$  je síla zatěžující a síla působící v bodě  $C$  zde představuje reakci od uložení (Obr. 22).

### 5.1.1 Uvolnění řešené konstrukce

Geometrie prutu i jeho zatížení jsou symetrické podle osy  $o_1$  a  $o_2$ , pomocí kterých snížíme vnitřní statickou neurčitost dvakrát a můžeme řešit pouze čtvrtinu původní konstrukce.



Obr. 22 – Uvolnění řešené konstrukce

Pro uvolněnou čtvrtinu prutu znázorněnou na Obr. 22 platí, že hodnota natočení střednice je v bodě  $B$  rovna nule ( $\Delta\varphi_B = 0$ ). Této okrajové podmínky dále využijeme pro výpočet zbytného momentu  $M_B$ .

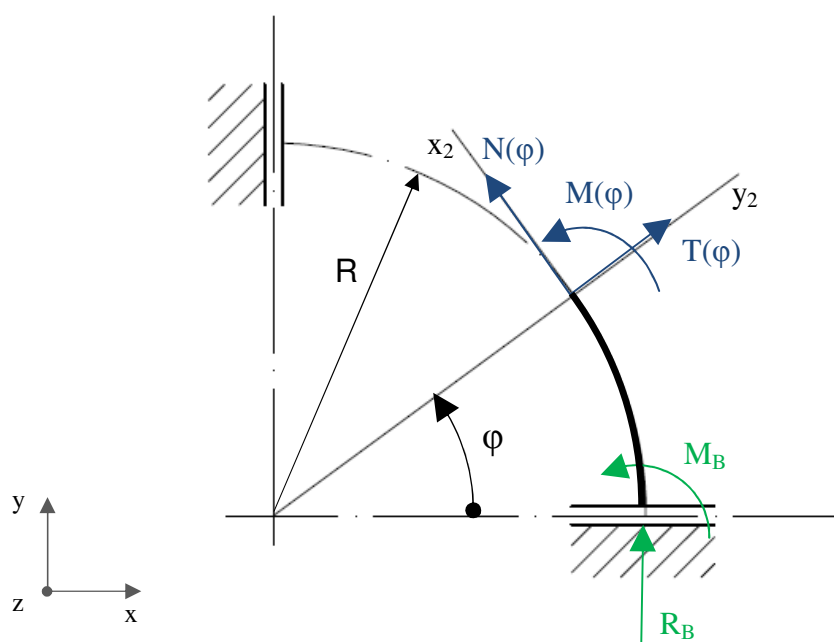
### 5.1.2 Výpočet reakcí z rovnic rovnováhy

Reakce se vypočtou ze sumy sil v ose  $x$  a sumy sil v ose  $y$  uvolněné čtvrtiny konstrukce zobrazené na Obr. 22.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow R_A = 0 \text{ N} \quad (5.2)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_B = \frac{F}{2} = 1005,5 \text{ N} \quad (5.3)$$

### 5.1.3 Stanovení výsledných vnitřních silových účinků



Obr. 23: výpočtové schéma slabě zakřiveného prutu

Na Obr. 23 je zobrazeno výpočtové schéma, pomocí kterého stanovíme výsledné vnitřní účinky a to vždy v krajních bodech tedy pro hodnotu úhlu  $\varphi \in < 0, \pi/2 >$ .

#### Výpočet Normálové síly $N(\varphi)$

$$\sum F_N = 0 \rightarrow N(\varphi) = -R_{BN} = -\frac{F}{2} \cdot \cos(\varphi) \quad (5.4)$$

kde normálová síla pro hodnotu uhlu  $\varphi$  v krajních bodech nabývá hodnot:

$$N(0) = -\frac{2011}{2} \cdot \cos(0) = -1005,5 \text{ N}, \quad (5.5)$$

$$N\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2011}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ N}. \quad (5.6)$$

#### Výpočet Posouvající síly $T(\varphi)$

$$\sum F_T = 0 \rightarrow T(\varphi) = -R_{BT} = -F/2 \cdot \sin(\varphi), \quad (5.7)$$

kde posouvající síla pro hodnotu uhlu  $\varphi$  v krajních bodech nabývá hodnot:

$$T(0) = -\frac{2011}{2} \cdot \sin(0) = 0 \text{ N}, \quad (5.8)$$

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2011}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1005,5 \text{ N}. \quad (5.9)$$

### Výpočet ohybového momentu $M(\varphi)$

$$\sum M = 0 \rightarrow M(\varphi) = -F/2 \cdot R \cdot (1 - \cos(\varphi)) - M_B \quad (5.10)$$

Pro vyjádření zbytného ohybového momentu  $M_B$  z okrajové podmínky pro nulové natočení v bodě B vyjdeme ze vztahu:

$$\Delta\varphi_B = \frac{\partial W}{\partial M_B} = 0 \rightarrow \frac{1}{EJ} \cdot \int_{(l)} M(\varphi) \cdot \frac{\partial M(\varphi)}{\partial M_B} \cdot R d\varphi = 0, \quad (5.11)$$

kde partiální derivace ohybového momentu  $M(\varphi)$  podle zbytného momentu  $M_B$  je rovna:

$$\frac{\partial M(\varphi)}{\partial M_B} = -1. \quad (5.12)$$

Dosazením partiální derivace (5.12) do okrajové podmínky (5.11) a integrací získáme:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_B &= \frac{1}{EJ} \cdot \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{F}{2} \cdot (R - R \cdot \cos(\varphi)) + M_B \right] R d\varphi = \\ &= \frac{1}{EJ} \cdot \left[ \frac{F}{2} \cdot R \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{F}{2} \cdot R + M_B \cdot \frac{\pi}{2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$M_B = \frac{FR}{\pi} \cdot \left( 1 - \frac{\pi}{2} \right). \quad (5.14)$$

Po dosazení zbytného ohybového momentu (5.14) zpět do (5.10) a úpravě bude ohybový moment  $M(\varphi)$  roven:

$$M(\varphi) = \frac{F}{2} \cdot R \cdot \left( \cos(\varphi) - \frac{2}{\pi} \right), \quad (5.15)$$

kde ohybový moment  $M(\varphi)$  pro hodnotu uhlu  $\varphi$  v krajních bodech nabývá hodnot:

$$M(0) = \frac{2011}{2} \cdot 60 \cdot \left( \cos(0) - \frac{2}{\pi} \right) = 21923,8 \text{ N} \cdot \text{mm}, \quad (5.16)$$

$$M\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2011}{2} \cdot 60 \cdot \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi} \right) = -38407,3 \text{ N} \cdot \text{mm}. \quad (5.17)$$



### 5.1.4 Výpočet napětí v místě B

Ve vyšetřovaném bodě B působí normálová síla  $N(0)$ , ohybový moment  $M(0)$  a posouvající síla  $T(0)$ , která je zde nulová.

Normálové napětí od normálové síly vypočteme ze vztahu:

$$\sigma_N = \frac{N(\varphi)}{S} = \frac{-F/2 \cdot \cos(\varphi)}{bh}, \quad (5.18)$$

kde pro bod B je hodnota normálového napětí od normálové síly rovna:

$$\sigma_{NB} = \frac{-1005,5 \cdot \cos(0)}{4,9 \cdot 46} = -4,5 \text{ MPa}. \quad (5.19)$$

Normálové napětí od ohybového momentu vypočteme ze vztahu:

$$\sigma_M = \frac{M(\varphi)}{J_z} \cdot y_2 = \frac{\frac{F}{2} \cdot R \cdot \left(\cos(\varphi) - \frac{2}{\pi}\right)}{\frac{1}{12}bh^3} \cdot y_2, \quad (5.20)$$

kde pro bod B je hodnota normálového napětí od ohybového momentu rovna:

pro vnitřní vlákna:

$$\sigma_{MB1} = \frac{1005,5 \cdot 60 \cdot \left(\cos(0) - \frac{2}{\pi}\right)}{\frac{1}{12} \cdot 46 \cdot 4,9^3} \cdot (-2,45) = -119,1 \text{ MPa}, \quad (5.21)$$

pro vnější vlákna:

$$\sigma_{MB2} = \frac{1005,5 \cdot 60 \cdot \left(\cos(0) - \frac{2}{\pi}\right)}{\frac{1}{12} \cdot 46 \cdot 4,9^3} \cdot 2,45 = 119,1 \text{ MPa}. \quad (5.22)$$

### Výpočet hlavních napětí v místě B

V bodě B je velikost smykového napětí nulová, proto lze hlavní napětí určit prostým součtem normálového napětí (tlakového) od normálové síly a normálového napětí (tahového/tlakového) od ohybového momentu.

Velikost hlavního napětí na vnitřních vláknech je:

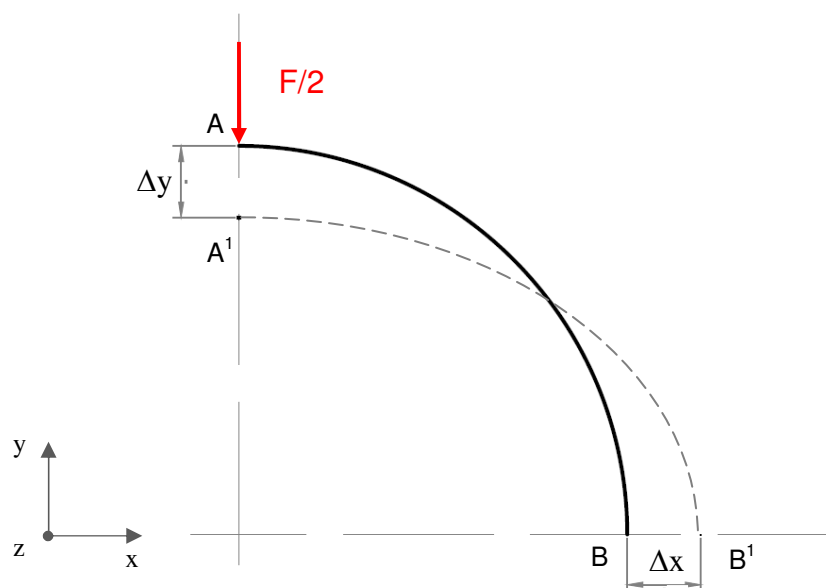
$$\sigma_{B1} = \sigma_{NB} + \sigma_{MB1} = -4,5 - 119,1 = -123,5 \text{ MPa}. \quad (5.23)$$

Velikost hlavního napětí na vnějších vláknech je:

$$\sigma_{B2} = \sigma_{NB} + \sigma_{MB2} = -4,5 + 119,1 = 114,6 \text{ MPa}. \quad (5.24)$$

### 5.1.5 Výpočet posunutí bodu A

Vlivem síly  $F/2$  dojde k posunutí bodu A do polohy  $A^1$ , tedy ke stlačení o hodnotu  $\Delta y$ , kde celkové posunutí je dvakrát větší z důvodu aplikace symetrie v ose  $o_1$ .



Obr. 24: Průhyb pod silou  $F/2$

Podle catiglianovy, která je podrobně rozebrána v literatuře [2] se posunutí pod silou vypočítá jako parciální derivace energie napjatosti  $W$  akumulované v prutu podle síly, kde energie napjatosti akumulovaná v prutu zobrazeného na Obr. 24 je dána součtem složek energie napjatosti od: ohybových momentů  $W_M$ , posouvajících sil  $W_T$ , normálových sil  $W_N$ .

**posunutí bodu A vypočteme ze vztahu:**

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{\partial}{\partial F/2} [W_M + W_T + W_N] = \\ &= \frac{1}{EJ} \int_{(\varphi)} M(\varphi) \frac{\partial M(\varphi)}{\partial F/2} R d\varphi + \frac{\beta}{GS} \int_{(\varphi)} T(\varphi) \frac{\partial T(\varphi)}{\partial F/2} R d\varphi + \\ &+ \frac{1}{ES} \int_{(\varphi)} N(\varphi) \frac{\partial N(\varphi)}{\partial F/2} R d\varphi, \end{aligned} \quad (5.25)$$

kde další výpočet bude proveden postupně pro jednotlivé složky posunutí bodu A od: ohybového momentu  $M(\varphi)$ , posouvající síly  $T(\varphi)$  a od normálové síly  $N(\varphi)$ .

**Posunutí bodu A od ohybového momentu je rovno:**

$$\Delta y_M = \frac{1}{EJ} \cdot \int_0^{\pi/2} M(\varphi) \cdot \frac{\partial M(\varphi)}{\frac{\partial F}{2}} R d\varphi, \quad (5.26)$$

kde partiální derivace ohybového momentu  $M(\varphi)$  podle zatěžující síly  $F/2$  je:

$$\frac{\partial M(\varphi)}{\frac{\partial F}{2}} = R \left( \cos(\varphi) - \frac{2}{\pi} \right). \quad (5.27)$$

Dosazením partiální derivace (5.27) do vztahu (5.26) a integrací dostaneme vztah:

$$\begin{aligned} \Delta y_M &= \frac{1}{EJ} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{F}{2} \cdot R \cdot \left( \cos(\varphi) - \frac{2}{\pi} \right) R \left( \cos(\varphi) - \frac{2}{\pi} \right) R d\varphi = \\ &= \frac{FR^3}{EJ} \cdot \int_0^{\pi/2} \left( \cos(\varphi) - \frac{2}{\pi} \right)^2 d\varphi = \frac{FR^3}{2EJ} \cdot \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi} + \frac{4}{2\pi} \right]. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Po úpravě a dosazení hodnot z tab.7 je posunutí od ohybového momentu  $\Delta y_M$  rovno:

$$\Delta y_M = \frac{FR^3 \cdot (\pi^2 - 8)}{8EJ\pi} = \frac{2011 \cdot 60^3 \cdot (\pi^2 - 8)}{8 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 450,98 \cdot \pi} = 0,341 \text{ mm}. \quad (5.29)$$

**Posunutí bodu A od posouvající síly je rovno:**

$$\Delta y_T = \frac{\beta}{GS} \cdot \int_0^{\pi/2} T(\varphi) \frac{\partial T(\varphi)}{\frac{\partial F}{2}} R d\varphi, \quad (5.30)$$

kde partiální derivace posouvající síly  $T(\varphi)$  podle zatěžující síly  $F/2$  je:

$$\frac{\partial T(\varphi)}{\frac{\partial F}{2}} = -\sin(\varphi). \quad (5.31)$$

Dosazením partiální derivace (5.31) do vztahu (5.30) a integrací dostaneme vztah:

$$\begin{aligned} \Delta y_T &= \frac{\beta}{GS} \cdot \int_0^{\pi/2} \left[ -\frac{F}{2} \cdot \sin(\varphi) \cdot (-\sin(\varphi)) \right] R d\varphi = \\ &= \frac{F\beta R}{2GS} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2(\varphi) d\varphi = \frac{F\beta R\pi}{8GS}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Po úpravě a dosazení hodnot z tab. 7 je posunutí od posouvající síly  $\Delta y_T$  rovno:

$$\Delta y_T = \frac{F\beta R\pi}{8GS} = \frac{2011 \cdot 6/5 \cdot 60 \cdot \pi}{8 \cdot 80700 \cdot 225,4} = 3,13 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \quad (5.33)$$

**Posunutí bodu A od normálové síly je rovno:**

$$\Delta y_N = \frac{1}{ES} \int_0^{\pi/2} N(\varphi) \frac{\partial N(\varphi)}{\partial F} R d\varphi. \quad (5.34)$$

Parciální derivace normálové síly  $N(\varphi)$  podle síly  $F/2$  je:

$$\frac{\partial N(\varphi)}{\partial F/2} = -\cos(\varphi), \quad (5.35)$$

kde dosazením parciální derivace (5.35) do vztahu (5.34) a integrací dostaneme vztah:

$$\Delta y_N = \frac{1}{ES} \cdot \int_0^{\pi/2} F/2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\varphi) R d\varphi = \frac{FR}{2ES} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2(\varphi) d\varphi = \quad (5.36)$$

$$= \frac{FR}{4ES} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \sin(2\varphi) + \varphi \right]_0^{\pi/2} \quad (5.37)$$

Po úpravě a dosazení hodnot z tab. 7 je posunutí od normálové síly  $\Delta y_N$  rovno:

$$\Delta y_N = \frac{FR\pi}{8ES} = \frac{2011 \cdot 60 \cdot \pi}{8 \cdot 210000 \cdot 225,4} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ mm}. \quad (5.38)$$

**Celkové posunutí v záporném směru osy y je rovno dvojnásobku součtu jednotlivých složek posunutí ( $\Delta y_M$ ,  $\Delta y_T$ ,  $\Delta y_N$ ).**

$$\Delta y_C = 2 \cdot (\Delta y_M + \Delta y_T + \Delta y_N) = (0,341 + 3,13 \cdot 10^{-3} + 1 \cdot 10^{-3}) \quad (5.39)$$

$$\Delta y_C = 0,691 \text{ mm}$$

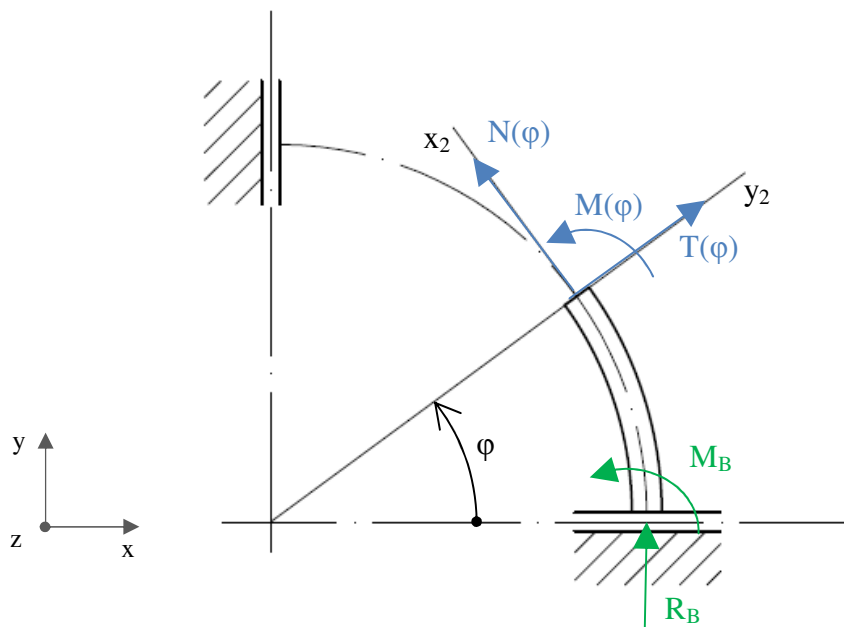
Aplikujeme – li na vztahy (5.23, 5.24, 5.39) jednotlivé zátěžové stavy uvedené v tab. 2, budou hodnoty hlavních napětí v bodě B ( $\sigma_{B1}$ ,  $\sigma_{B2}$ ) a celkové posunutí bodu A ( $\Delta y_C$ ) nabývat hodnot uvedených v tab. 8.

Výsledky analytického výpočtu	Zátěžový stav		
	1	2	3
Hlavní napětí v bodě B na vnitřních vláknech $\sigma_{B1}$ [MPa]	-49,2	-75,6	-123,6
Hlavní napětí v bodě B na vnějších vláknech $\sigma_{B2}$ [MPa]	45,6	70,2	114,6
Celkové posunutí $\Delta y_C$ [mm]	0,275	0,423	0,691

*tab. 8: Výsledky analytického výpočtu pro slabě zakřivený prut*

## 5.2 Řešení konstrukce jako silně zakřivený prut

Pro srovnání s řešením konstrukce podle teorie slabě zakřivených prutů, je konstrukce řešena také podle teorie silně zakřivených prutů. Výpočtové schéma silně zakřiveného prutu je uvedeno na Obr. 25.



Obr. 25 – Schéma silně zakřiveného prutu

Rovnice rovnováhy jsou shodné s řešením konstrukce podle teorie slabě zakřivených prutů (5.2, 5.3) stejně jako výsledné vnitřní silové účinky (5.4, 5.7, 5.10), kde u ohybového momentu  $M(\varphi)$  vztah (5.10) je třeba znovu vypočítat hodnotu zbytného momentu  $M_B$ , jelikož deformační energie  $W$  je podle teorie silně zakřivených prutů (uvedená v kapitole 2.4.2) odlišná.

**Výpočet zbytného momentu  $M_B$  z okrajové podmínky pro nulové natočení v bodě B**

$$\Delta\varphi_B = \frac{\partial W}{\partial M_B} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{1}{ESR_e} \int_0^{\pi/2} M(\varphi) \frac{\partial M(\varphi)}{\partial M_B} R d\varphi + \frac{1}{ESR} \int_0^{\pi/2} \left( M(\varphi) \frac{\partial N}{\partial M_B} + N \frac{\partial M(\varphi)}{\partial M_B} \right) R d\varphi = 0, \quad (5.40)$$

kde příslušné parciální derivace jsou:

$$\frac{\partial M(\varphi)}{\partial M_B} = -1, \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial N}{\partial M_B} = 0. \quad (5.42)$$

Dosazením partiálních derivací (5.41, 5.42) do vztahu (5.40) a integrací dostaneme:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_B &= \frac{1}{ESRe} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{F}{2} \cdot (R - R \cdot \cos(\varphi)) + M_B \cdot R d\varphi \\ &\quad + \frac{1}{ESR} \int_0^{\pi/2} \frac{F}{2} \cdot \cos(\varphi) R d\varphi = \\ &= \frac{1}{ESRe} \cdot \left[ \frac{FR\pi}{4} - \frac{FR}{2} + M_B \cdot \frac{\pi}{2} \right] + \frac{F}{2ESR} = 0.\end{aligned}\tag{5.43}$$

Po úpravě je hodnota zbytného momentu  $M_B$  rovna:

$$M_B = -\frac{FR}{2} + \frac{FR}{\pi} - \frac{Fe}{\pi}.\tag{5.44}$$

Po dosazení zbytného momentu (5.44) zpět do vztahu (5.10) a úpravě dostaneme vztah:

$$M(\varphi) = \frac{FR}{2} \cos(\varphi) - \frac{F(R - e)}{\pi},\tag{5.45}$$

kde ohybový moment  $M(\varphi)$  pro hodnotu uhlu  $\varphi$  v krajních bodech nabývá hodnot:

$$M(0) = \frac{2011 \cdot 60}{2} \cos(0) - \frac{2011(60 - 0,033)}{\pi} = 21943,9 \text{ N} \cdot \text{mm},\tag{5.46}$$

$$M\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2011 \cdot 60}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2011(60 - 0,033)}{\pi} = -38386,2 \text{ N} \cdot \text{mm}.\tag{5.47}$$

### 5.2.1 Výpočet napětí v místě B

Změna ve výpočtu oproti slabě zakřivenému prutu nastává pouze u normálového napětí od ohybového momentu, kde je nutno uvažovat s posunutím neutrální osy  $y_N$  vůči hlavní centrální ose  $y_T$ .

Normálové napětí od ohybového momentu je dáno vztahem:

$$\sigma_M = -\frac{M(\varphi)}{S \cdot e \cdot \rho} \cdot y_2,\tag{5.48}$$

kde poloměr zakřivení neutrální osy  $r$  vypočteme jako:

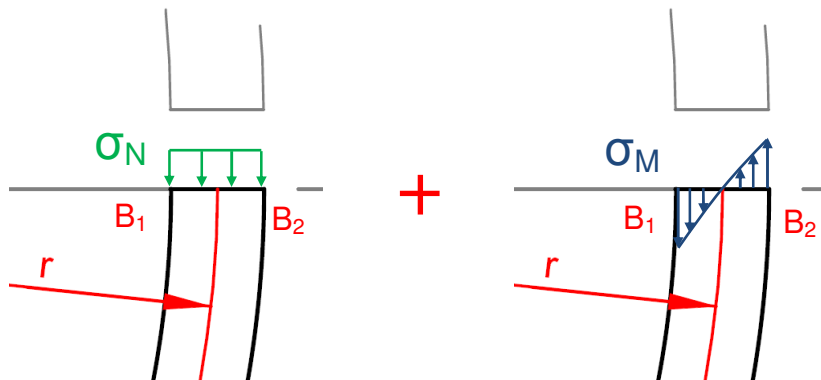
$$r = \frac{S}{\int_S \frac{dS}{\rho}} = \frac{bh}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{bd\varphi}{\varphi}} = \frac{h}{\ln(R_2 - R_1)} = \frac{4,9}{\ln\left(\frac{62,45}{57,55}\right)} = 59,966 \text{ mm}.\tag{5.49}$$

Posunutí neutrální osy  $y_N$  vůči hlavní centrální ose  $y_T$  je rovno:

$$e = R - r = 0,033 \text{ mm}.\tag{5.50}$$

## Výpočet hlavních napětí v místě B

Stejně jako u teorie slabě zakřivených prutů se i zde hlavní napětí vypočtu jako součet normálového napětí od normálové síly podle vztahu (5.18) a normálového napětí od ohybového momentu podle vztahu (5.48), jak je znázorněno na Obr. 26.



Obr. 26: Superpozice normálových napětí

Hlavní napětí na vnitřních vláknech určíme ze vztahu:

$$\sigma_{B1} = \frac{N}{S} + \frac{M(0)}{S \cdot e} \cdot \frac{e - \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} = \frac{-1005,5}{225,4} + \frac{21943,85}{225,4 \cdot 0,033} \cdot \frac{0,033 - \frac{4,9}{2}}{60 - \frac{4,9}{2}} \quad (5.51)$$

$$\sigma_{B1} = -128,36 \text{ MPa},$$

hlavní napětí na vnějších vláknech vypočítáme jako:

$$\sigma_{B2} = \frac{N}{S} + \frac{M(0)}{S \cdot e} \cdot \frac{e + \frac{h}{2}}{R + \frac{h}{2}} = \frac{-1005,5}{225,4} + \frac{21943,85}{225,4 \cdot 0,033} \cdot \frac{0,033 + \frac{4,9}{2}}{60 + \frac{4,9}{2}} \quad (5.52)$$

$$\sigma_{B2} = 112,84 \text{ MPa}.$$

### 5.2.2 Výpočet posunutí bodu A

Výpočet posunutí bodu A se provádí stejným způsobem jako u slabě zakřiveného prutu (viz kapitola 5.1.5), avšak pro jinou energii napjatosti (viz kapitola 2.4.2), kde posunutí od posouvající síly  $\Delta y_T$  a posunutí od normálové síly  $\Delta y_N$  se nezmění.

Při výpočtu posunutí od ohybového momentu vyjdeme ze vztahu:

$$\Delta y_M = \frac{1}{ESRe} \int_{\varphi} M(\varphi) \frac{\partial M(\varphi)}{\partial F} R d\varphi, \quad (5.53)$$

kde parciální derivace ohybového momentu  $M(\varphi)$  podle síly  $F/2$  je rovna:

$$\frac{\partial M(\varphi)}{\partial F} = R \cdot \cos(\varphi) - \frac{2(R - e)}{\pi}. \quad (5.54)$$

Dosazením parciální derivace (5.54) do vztahu (5.53) a integrací dostaneme:

$$\Delta y_M = \frac{1}{ESRe} \int \left[ \left( \frac{FR}{2} \cos(\varphi) - \frac{F(R-e)}{\pi} \right) \cdot \left( R \cdot \cos(\varphi) - \frac{2(R-e)}{\pi} \right) \right] R d\varphi = \quad (5.55)$$

$$= \frac{F}{ESe} \cdot \left[ \frac{R^2 \pi}{8} - \frac{2R}{\pi} (R-e) + \frac{(R-e)^2}{\pi} \right]. \quad (5.56)$$

Po úpravě a dosazení hodnot z tab. 7 je posunutí od ohybového momentu  $\Delta y_M$  rovno:

$$\Delta y_M = \frac{2011}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 225,4 \cdot 0,033} \cdot \left[ \frac{60^2 \pi}{8} - \frac{2 \cdot 60}{\pi} (60 - 0,033) + \frac{(60 - 0,033)^2}{\pi} \right] \quad (5.57)$$

$$\Delta y_M = 0,344 \text{ mm}$$

**Posunutí od ohybového momentu, který se pootočí o uhel natočení řezu je:**

$$\Delta y_{MN} = \frac{1}{ESR} \int \left( M(\varphi) \frac{\partial N}{\partial F} + N \frac{\partial M(\varphi)}{\partial F} \right) R d\varphi \quad (5.58)$$

Dosazením parciálních derivací (5.35) a (5.54) do vztahu (5.58) získáme vztah:

$$\Delta y_{MN} = \frac{2F}{ES} \int -\frac{R}{2} \cos(\varphi) + \frac{(R-e)}{\pi} \cos(\varphi) d\varphi, \quad (5.59)$$

kde po integraci, úpravě a dosazení hodnot z tab. 7 dostaneme:

$$\Delta y_{MN} = \frac{2F}{ES} \left( -\frac{R\pi}{8} + \frac{R-e}{\pi} \right) = \frac{2 \cdot 2011}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 225,4} \left( -\frac{60 \cdot \pi}{8} + \frac{60 - 0,0033}{\pi} \right) \quad (5.60)$$

$$\Delta y_{MN} = -0,00038 \text{ mm}.$$

**Celkové posunutí v záporném směru osy y je rovno dvojnásobku součtu jednotlivých složek posunutí ( $\Delta y_M$ ,  $\Delta y_T$ ,  $\Delta y_N$ ,  $\Delta y_{MN}$ ).**

$$\Delta y_C = 2(\Delta y_M + \Delta y_T + \Delta y_N + \Delta y_{MN}) = 2(344 + 3,13 + 1 - 0,38) \cdot 10^{-3} \quad (5.61)$$

$$\Delta y_C = 0,696 \text{ mm}$$

Aplikací zátěžových stavů uvedených v tab. 2 na vztahy (5.51, 5.52, 5.61) získáme hodnoty hlavních napětí v bodě B ( $\sigma_{B1}$ ,  $\sigma_{B2}$ ) a celkové posunutí ( $\Delta y_C$ ) uvedené v tab. 9.

Výsledky analytického výpočtu	Zátěžový stav		
	1	2	3
Hlavní napětí v bodě B na vnitřních vláknech $\sigma_{B1}$ [MPa]	-51,2	-78,6	-128,4
Hlavní napětí v bodě B na vnějších vláknech $\sigma_{B2}$ [MPa]	44,9	69,1	112,8
Celkové posunutí $\Delta y_C$ [mm]	0,281	0,432	0,696

tab. 9: výsledky analytického výpočtu pro silně zakřivený prut



## 6 MKP napětově - deformační analýza řešených konstrukcí

MKP napětově deformační analýza byla provedena v programu ANSYS 12.1. Tento program byl zvolen zejména z důvodu snadné editace geometrického modelu a okrajových podmínek.

Cílem této analýzy je určení hlavních napětí a posunutí na konstrukci č. 1 uvedené na Obr. 17 a konstrukci č. 2 uvedené na Obr. 19 v místech, kde bylo provedeno tenzometrické měření, tak aby bylo možné provést srovnání. Analýza je provedena pro třetí zátěžový stav tedy pro sílu  $F = 2011$  N. Použité materiálové konstanty jsou: modul pružnosti v tahu  $E = 2,1 \cdot 10^5$  MPa a poissonovo číslo  $\mu = 0,3$ .

### 6.1 Přehled prvků použitých v MKP analýze

#### SOLID 186

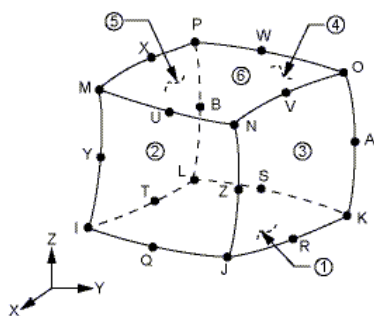
Jedná se o kvadratický 3D (osmistěn) zobrazený na Obr. 27 je vhodný pro tvorbu nepravidelné sítě a je definován dvaceti uzly, kde každý z uzlů má tři stupně volnosti: posuvy ve směrech x, y, z [11].

#### SOLID 187

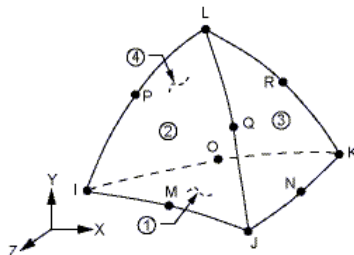
Tento kvadratický 3D prvek (čtyřstěn) zobrazený na Obr. 28 je definován deseti uzly, které mají tři stupně volnosti: posuvy ve směrech x, y, z, a stejně jako Solid 186 je i tento prvek vhodný pro tvorbu nepravidelné sítě [11].

#### SHELL 181

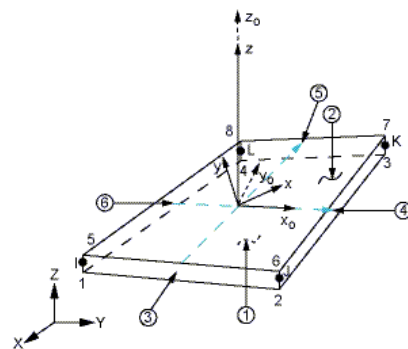
Prvek Shell 181 zobrazený na Obr. 29 je vhodný pro analýzu tenkých až středně silných skořepinových konstrukcí. Tento prvek je definován čtyřmi uzly se šesti stupni volnosti v každém uzlu: posuvy x, y, z, a rotace kolem os x, y, z [11].



Obr. 27: Solid 186[11]



Obr. 28: Solid 187[11]



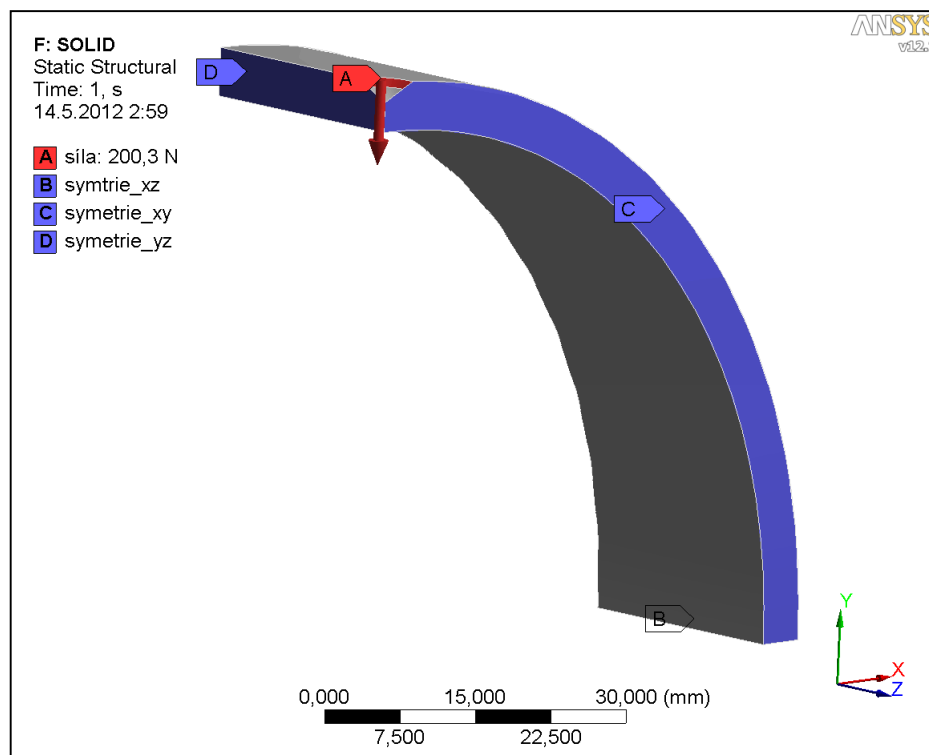
Obr. 29: Shell 181[11]

## 6.2 Řešení konstrukce č. 1 pomocí prvků typu solid

Pro řešení konstrukce č. 1 pomocí prvků typu solid byl vytvořen objemový model, kde za pomoci symetrie je pro výpočet potřeba pouze osmina tohoto modelu. Model byl vytvořen na základě naměřených hodnot uvedených v tab. 7.

### 6.2.1 Definování okrajových podmínek

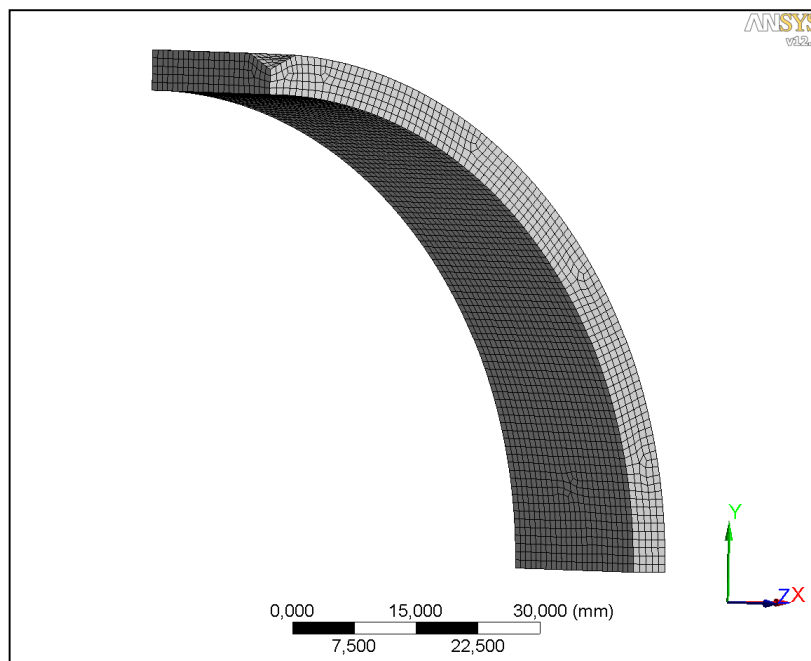
Síla je aplikována na část plochy v díře (Obr. 30 – oblast A), kde působí v záporném směru osy  $y$ . Protože působí dvě roviny symetrie, bude její velikost čtvrtinová. Posuvům je zabráněno pomocí vazeb symetrie. Symetrie v rovině  $xz$  (Obr. 30 – oblast A) zabraňuje posuvu konstrukce ve směru normály k rovině, tedy ve směru osy  $y$  a představuje tak vazbu od uložení konstrukce v upínacím přípravku. Zbylé dvě symetrie v rovinách  $xy$  a  $yz$  zabraňují posuvům ve směrech  $x$  a  $z$  (Obr. 30 – oblasti C, D).



Obr. 30: Okrajové podmínky – konstrukce č. 1 (solid)

### 6.2.2 Konečnoprvkový model

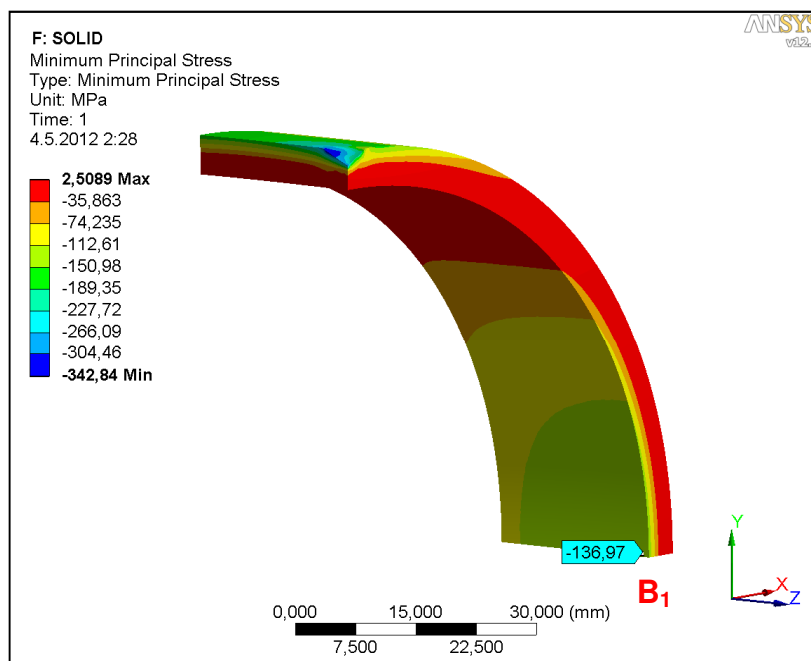
Sít konečnoprvkového modelu je převážně mapována prvky typu solid 186 a solid 187 (popis prvků viz kapitola 6.1). Vzhledem k jednoduchosti modelu je velikost prvku zvolena 1 mm, kde po výšce profilu vychází pět elementů. Takto zvolená síť zobrazená na Obr. 31 představuje 11 782 prvků a 53 681 uzlů.



Obr. 31: Konečnoprvkový model – konstrukce č. 1 (solid)

### 6.2.3 Vykreslení minimálního hlavního napětí

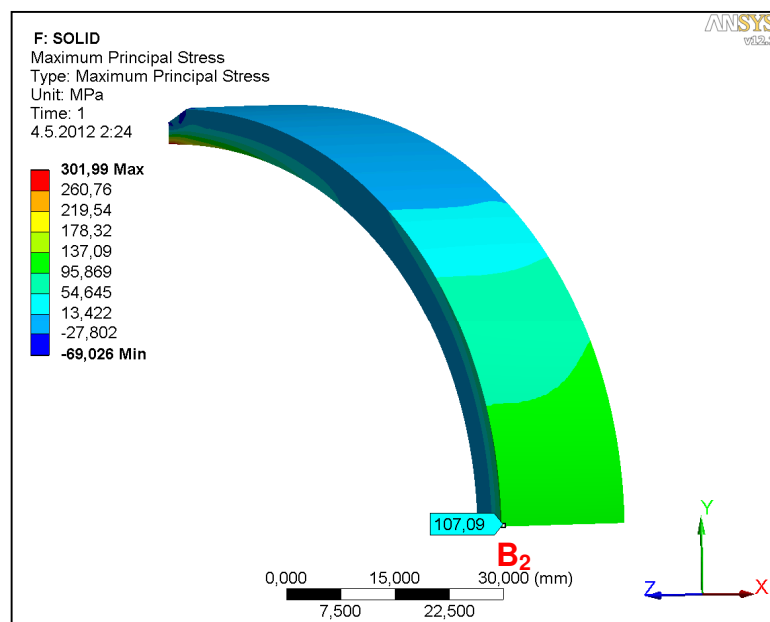
Pro řešení konstrukce pomocí prvků typu solid je průběh minimálního hlavního napětí zobrazen na Obr. 32, kde minimální hlavní napětí na vnitřních vláknech ve vyšetřovaném bodě  $B_1$  nabývá hodnoty -137 MPa.



Obr. 32: Hlavní napětí minimální – konstrukce č. 1(solid)

#### 6.2.4 Vykreslení maximálního hlavního napětí

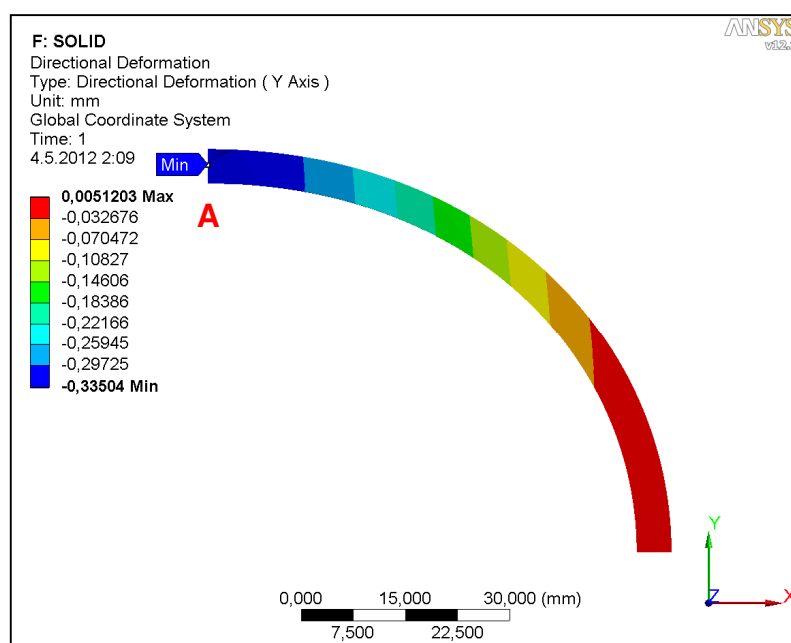
Pro řešení konstrukce pomocí prvků typu solid je průběh maximálního hlavního napětí zobrazen na Obr. 33, kde maximální hlavní napětí na vnějších vláknech ve vyšetřovaném bodě  $B_2$  nabývá hodnoty -107,1 MPa.



Obr. 33: Hlavní napětí maximální - konstrukce č. 1, (solid)

#### 6.2.5 Vykreslení posuvů

Na Obr. 34 je zobrazeno vykreslení posuvů ve směru osy y konstrukce řešené pomocí prvků typu solid, kde velikost posunutí vyšetřovaného bodu A je -0,335 mm. Celkové posunutí bude dvakrát větší z důvodu aplikace symetrie xz a pro srovnání bude uváděno s kladným znaménkem.



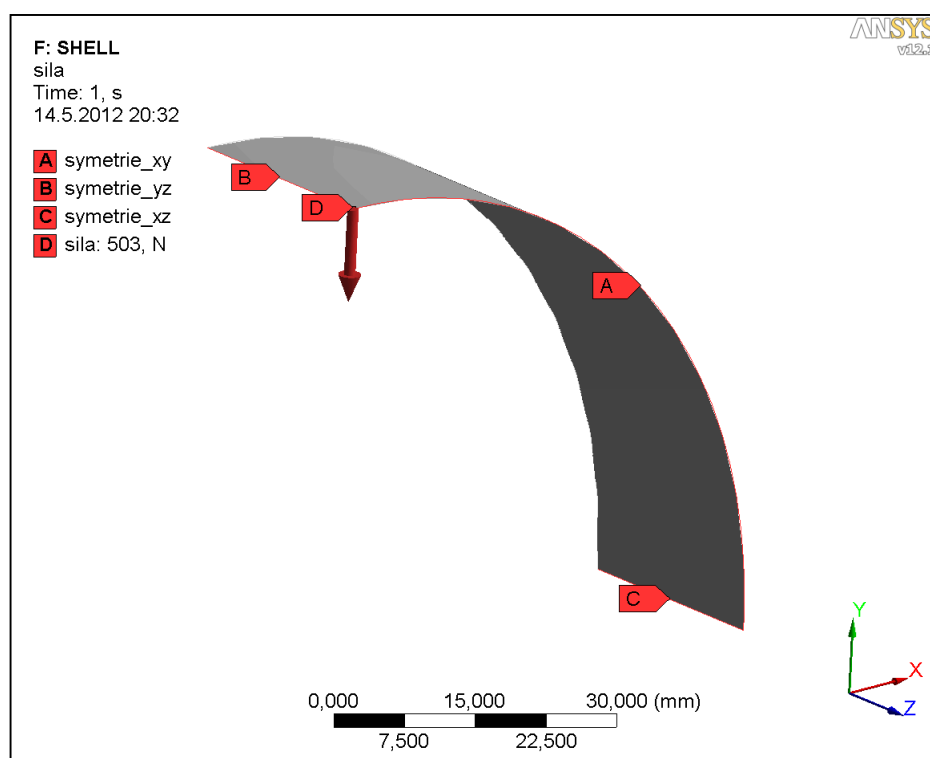
Obr. 34: Posunutí ve směru osy y - konstrukce č. 1(solid)

## 6.3 Řešení konstrukce č. 1 pomocí prvků typu shell

Pro řešení konstrukce č. 1 pomocí prvků typu shell byl vytvořen model jako zakřivená plocha o poloměru střednice  $R = 60$  mm, šířky  $b = 46$  mm, kde i zde je řešena pouze osmina modelu.

### 6.3.1 Definování okrajových podmínek

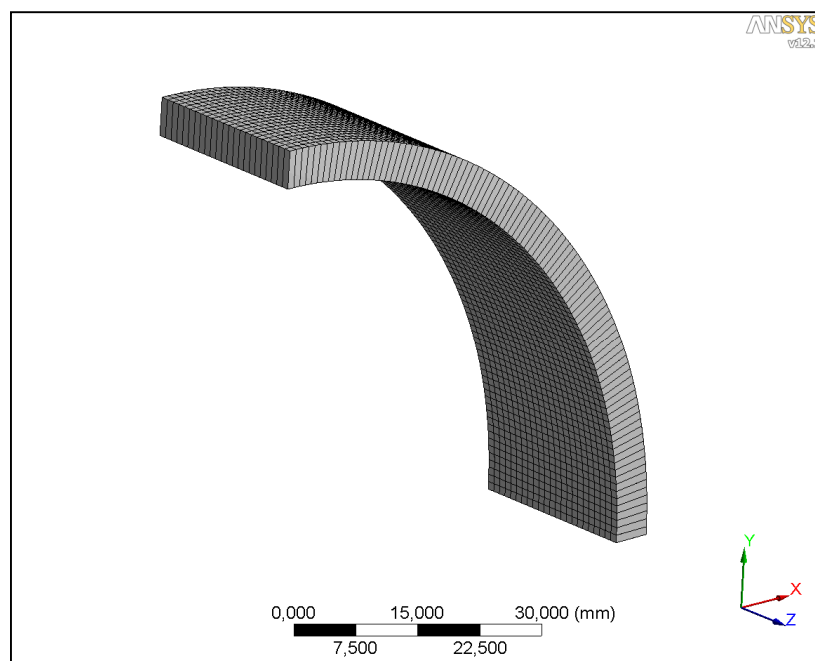
Okrajové podmínky jsou uvedeny na Obr. 35, kde zatěžující síla o velikosti čtvrtiny celkové zatěžující síly působí v bodě  $D$ . Posuvy jsou odebrány stejným způsobem jako u konstrukce řešené pomocí prvků typu solid, tedy pomocí symetrie (v oblastech  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ) s tím rozdílem, že pro skořepinu tyto vazby odebírají navíc i rotace.



Obr. 35: Okrajové podmínky - konstrukce č. 1 (shell)

### 6.3.2 Konečnoprvkový model

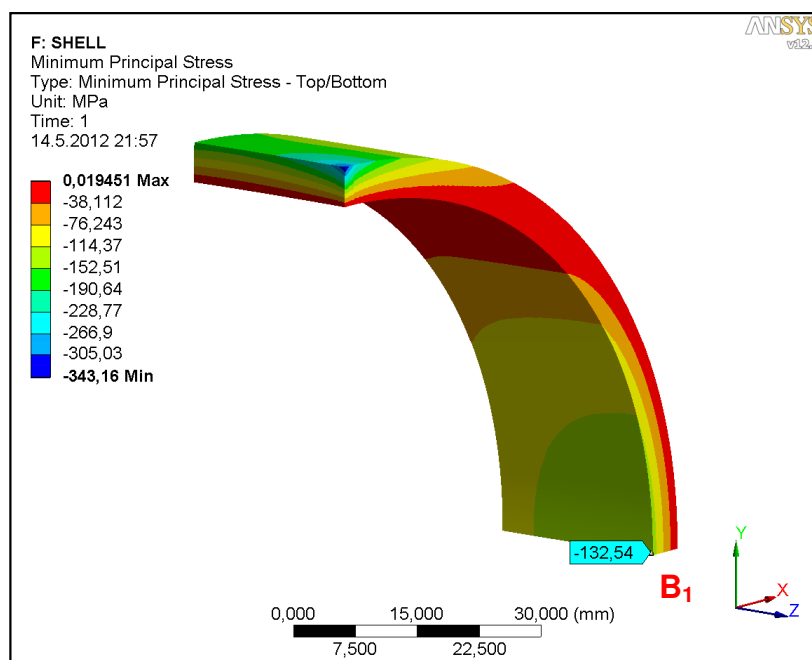
Síť zobrazená na Obr. 36 je tvořena prvky typu Shell 181 (popis prvku viz kapitola 6.1) s velikostí prvku 1mm, kde u shell prvků je vždy po výšce profilu pouze jeden prvek. Síť obsahuje 2185 elementů a 2304 uzlů což ve srovnání s konečnoprvkovým modelem tvořeným prvky typu solid (Obr. 31) představuje snížení počtu uzlů o více než 90 %.



Obr. 36: Sít' – konstrukce č. 1 (shell)

### 6.3.3 Vykreslení minimálního hlavního napětí

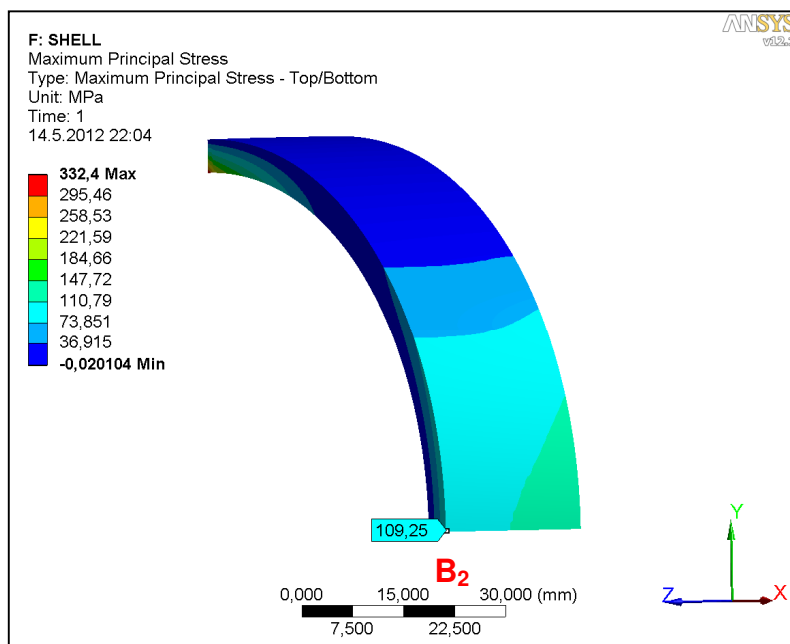
Pro řešení konstrukce pomocí prvků typu shell je průběh minimálního hlavního napětí zobrazen na Obr. 37, kde minimální hlavní napětí na vnitřních vláknech ve vyšetřovaném bodě  $B_1$  nabývá hodnoty -132,5 MPa.



Obr. 37: Hlavní napětí minimální – konstrukce č. 1 (shell)

### 6.3.4 Vykreslení maximálního hlavního napětí

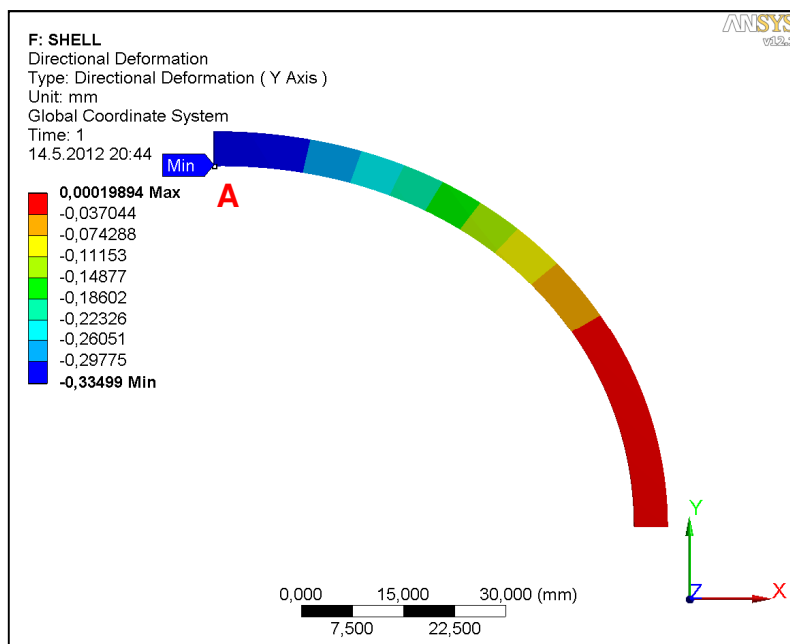
Pro řešení konstrukce pomocí prvků typu shell je průběh maximálního hlavního napětí zobrazen na Obr. 38, kde maximální hlavní napětí na vnějších vláknech ve vyšetřovaném bodě  $B_2$  nabývá hodnoty -109,3 MPa.



Obr. 38: Hlavní napětí maximální – konstrukce č. 2 (shell)

### 6.3.5 Vykreslení posuvů

Na Obr. 39 je zobrazeno vykreslení posuvů ve směru osy y konstrukce řešené pomocí prvků typu shell, kde velikost posunutí vyšetřovaného bodu A je -0,335 mm. Celkové posunutí bude dvakrát větší z důvodu aplikace symetrie xz a pro srovnání bude uváděno s kladným znaménkem.



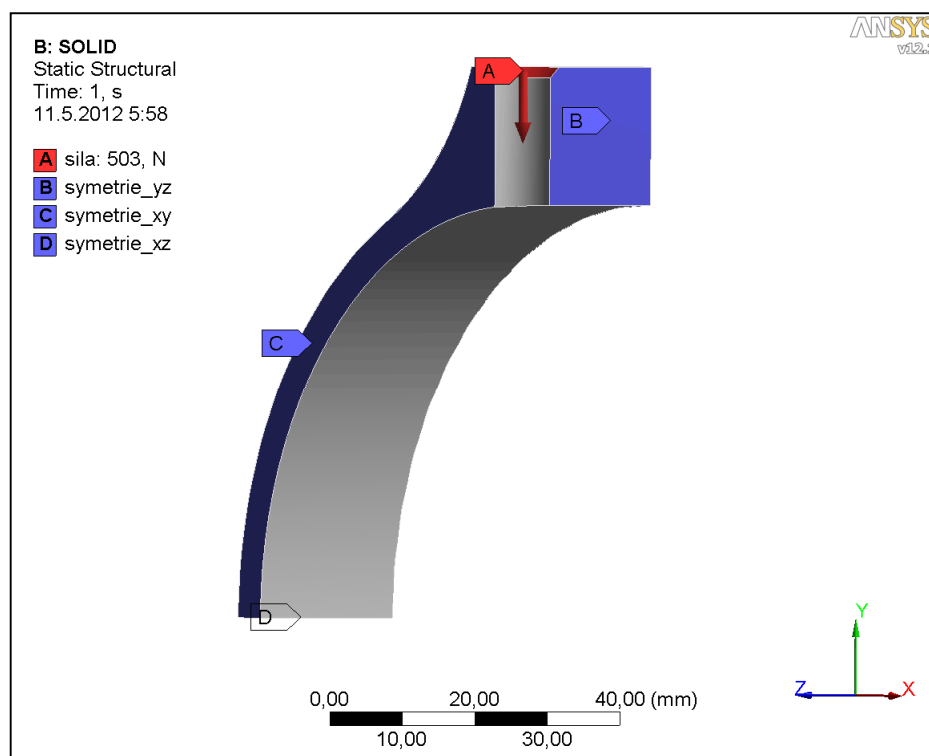
Obr. 39: Posunutí ve směru osy y – konstrukce č. 1 (shell)

## 6.4 Řešení konstrukce č. 2 pomocí prvků typu solid

Pro řešení konstrukce č. 2 pomocí prvků typu solid byl vytvořen objemový model, kde za pomoci symetrie je pro výpočet použita osmina modelu. Přesné rozměry modelu jsou uvedeny v příloze – D.

### 6.4.1 Okrajové podmínky

Okrajové podmínky jsou uvedeny na Obr. 40, kde je zatěžující síla aplikována na sražení v díře (oblast A) a její velikost je čtvrtinová. Stejně jako v obou předešlých případech byly i zde použity vazby symetrie. Symetrie v rovině  $xz$  (oblast D) zabraňuje posuvu konstrukce ve směru osy  $y$ . Symetrie v rovinách  $yz$  a  $xy$  zabraňují posuvu konstrukce ve směrech  $x$  a  $z$  (oblasti B, C).

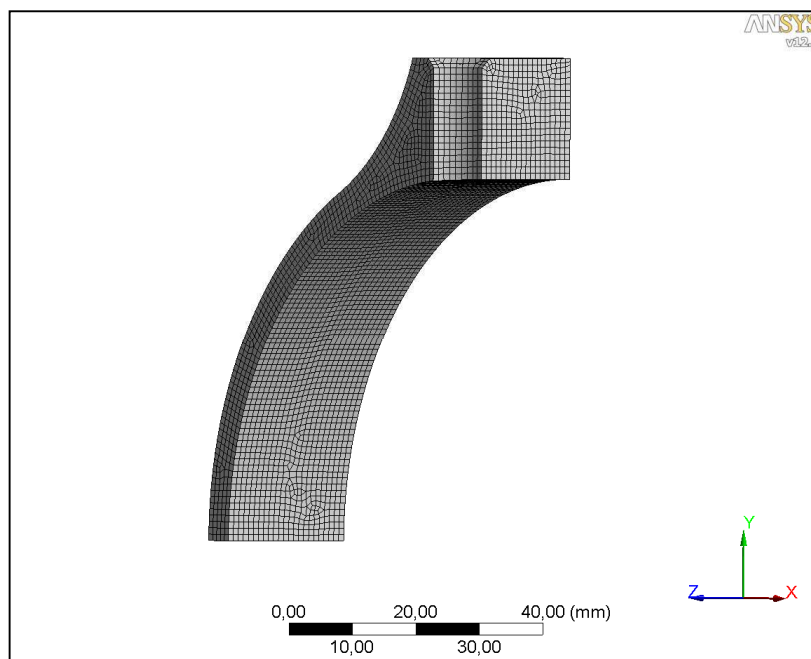


Obr. 40: Okrajové podmínky – konstrukce č. 2

### 6.4.2 Konečnoprvkový model

Síť konečnoprvkového modelu zobrazená na Obr. 41 je tvořena prvky typu solid 186 a solid 187. Velikost prvku je zvolena 1 mm, aby po výšce profilu vycházelo pět prvků stejně jako u konečnoprvkového modelu konstrukce č. 1 zobrazeného na Obr. 31. Síť je tvořena 17 678 prvky a 76 282 uzly.

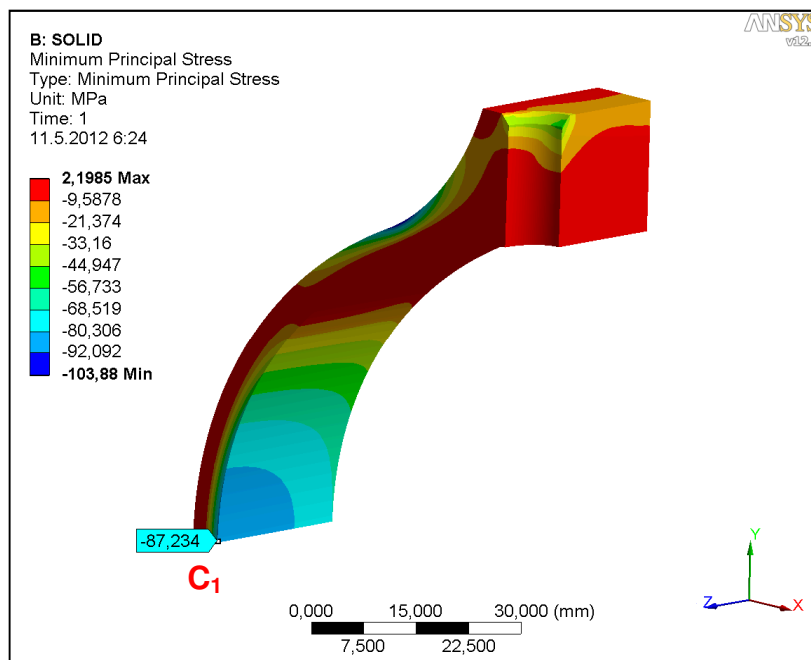




Obr. 41: Konečnoprvkový model – konstrukce č. 2

### 6.4.3 Vykreslení minimálního hlavního napětí

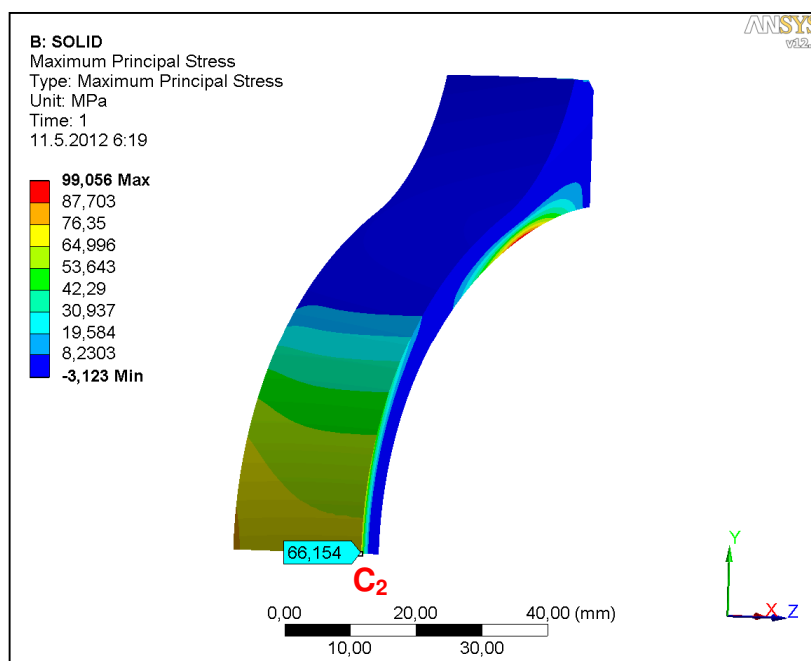
Na Obr. 42 je zobrazen průběh minimálního hlavního napětí, kde na vnitřních vláknech ve vyšetřovaném bodě  $C_1$  minimální hlavní napětí nabývá hodnoty -87,2 MPa.



Obr. 42: Hlavní napětí minimální – konstrukce č. 2

#### 6.4.4 Vykreslení maximálního hlavního napětí

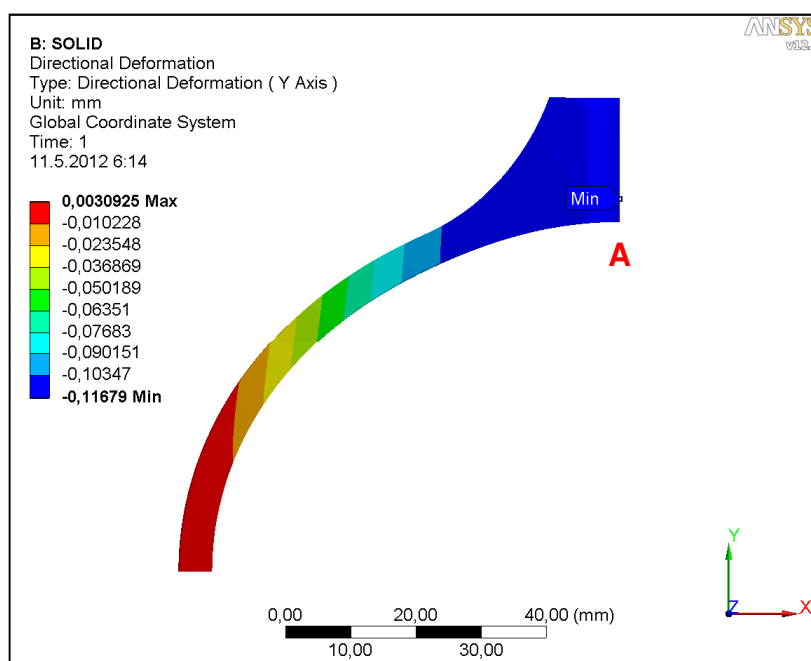
Na Obr. 43 je zobrazen průběh minimálního hlavního napětí, kde na vnějších vláknech ve vyšetřovaném bodě  $C_2$  minimální hlavní napětí nabývá hodnoty 66,2 MPa.



Obr. 43: Hlavní napětí maximální – konstrukce č. 2

#### 6.4.5 Vykreslení posuvů

Na Obr. 44 je zobrazeno vykreslení posuvů ve směru osy y, kde velikost posunutí vyšetřovaného bodu A je -0,117 mm. Celkové posunutí bude dvakrát větší z důvodu aplikace symetrie xz a pro srovnání bude uváděno s kladným znaménkem.



Obr. 44: Posunutí ve směru osy y – konstrukce č. 2

## 7 Porovnání jednotlivých přístupů k řešení konstrukcí

Porovnávané výsledky jsou počítány pro zatížení uvedené v tab. 10.

Zátěžový stav	Síla [N]
1	802
2	1231
3	2011

tab. 10: Síla v jednotlivých zátěžích

### 7.1 Porovnání dosažených výsledku na konstrukci č. 1

Porovnání výsledků jednotlivých přístupů výpočtu hlavního napětí na vnitřních vláknech u konstrukce č. 1 je uvedeno v tab. 11.

Porovnávaná veličina	Přístup	Zátěžový stav		
		1	2	3
Hlavní napětí na vnitřních vláknech $\sigma_{B1}$ [MPa]	Tenzometricky	-53,3	-81,9	-135,5
	Analyticky (slabě z. p.)	-49,2	-75,6	-123,6
	Analyticky (silně z. p.)	-51,2	-78,6	-128,4
	MKP (solid)	-54,5	-83,8	-137,0
	MKP (skořepina)	-54,5	-81,0	-132,5

tab. 11: Porovnání hlavního napětí na vnitřních vláknech – konstrukce č. 1

Porovnání výsledků jednotlivých přístupů výpočtu hlavního napětí na vnějších vláknech u konstrukce č. 1 je uvedeno v tab. 12.

Porovnávaná veličina	Přístup	Zátěžový stav		
		1	2	3
Hlavní napětí na vnějších vláknech $\sigma_{B2}$ [MPa]	Tenzometricky	41,6	63,8	105,4
	Analyticky (slabě z. p.)	45,7	70,2	114,6
	Analyticky (silně z. p.)	45,0	69,1	112,8
	MKP (solid)	42,6	65,5	107,1
	MKP (skořepina)	42,6	66,8	109,3

tab. 12: Porovnání hlavního napětí na vnějších vláknech – konstrukce č. 1

Porovnání výsledků jednotlivých přístupů výpočtu celkového posunutí bodu A u konstrukce č. 1 je uvedeno v tab. 13.

Porovnávaná veličina	Přístup	Zátěžový stav		
		1	2	3
Celkové posunutí bodu A $\Delta y_{AC}$ [mm]	Tenzometricky	0,270	0,410	0,680
	Analyticky (slabě z. p.)	0,275	0,423	0,691
	Analyticky (silně z. p.)	0,281	0,432	0,696
	MKP (solid)	0,267	0,413	0,670
	MKP (skořepina)	0,267	0,410	0,67

tab. 13: Porovnání celkového stlačení – konstrukce č. 1

## 7.2 Porovnání dosažených výsledku na konstrukci č. 2

Porovnání výsledků jednotlivých přístupů výpočtu hlavního napětí na vnitřních vláknech u konstrukce č. 2 je uvedeno v tab. 14.

Porovnávaná veličina	Přístup	Zátěžový stav		
		1	2	3
Hlavní napětí na vnitřních vláknech $\sigma_{C1}$ [MPa]	Tenzometricky	-34,0	-52,3	-86,1
	MKP	-34,7	-53,3	-87,2

tab. 14: Porovnání napětí na vnitřních vláknech – konstrukce č. 2

Porovnání výsledků jednotlivých přístupů výpočtu hlavního napětí na vnějších vláknech u konstrukce č. 2 je uvedeno v tab. 15.

Porovnávaná veličina	Přístup	Zátěžový stav		
		1	2	3
Hlavní napětí na vnějších vláknech $\sigma_{C2}$ [MPa]	Tenzometricky	26,0	39,9	65,7
	MKP	26,4	40,5	66,2

tab. 15: Porovnání napětí na vnějších vláknech – konstrukce č. 2

Porovnání výsledků jednotlivých přístupů výpočtu celkového posunutí bodu A u konstrukce č. 2 je uvedeno v tab. 16.

Porovnávaná veličina	Přístup	Zátěžový stav		
		1	2	3
celkové posunutí bodu A $\Delta y_{AC}$ [mm]	Tenzometricky	0,09	0,14	0,24
	MKP	0,093	0,143	0,234

tab. 16: Porovnání stlačení – konstrukce č. 2

## 8 Závěr

Cílem bakalářské práce bylo srovnání výsledků dosažených tenzometrickým měřením deformací a stlačení dvou konstrukcí s MKP napětově - deformační analýzou. První zkoumaná konstrukce byla navíc speciálně zhotovena pro srovnání s analytickým řešením podle teorie křivých prutů a to jak slabě zakřivených tak i silně zakřivených prutů. Tato konstrukce (Obr. 17) má tvar prstence s konstantním průřezem po celé své délce. Druhá konstrukce (Obr. 19) má podobné rozměry v oblasti s konstantním průřezem ale tvarově je již složitější, proto je srovnána pouze s MKP analýzou.

Konstrukce byly opatřeny jednoduchými foliovými tenzometry, které měří deformace na vnitřních a vnějších vláknech obou konstrukcí. Měření bylo provedeno pomocí nového upínacího přípravku (Obr. 16), který byl vylepšen přidáním snímače síly a opatřen svorkami, které zabraňují v rotaci měřené konstrukce. Zatěžující síla je vyvozena utažením páky díky čemuž se konstrukce pevně upne v přípravku. Obě konstrukce byly zatěžovány stejným způsobem a také stejnými silami.

MKP napětově – deformační analýza byla provedena v programu ANSYS 12.1. Protože je geometrie obou konstrukcí poměrně jednoduchá bylo možné z naměřených rozměrů vytvořit přesný geometrický model a s využitím symetrie řešit pouze osminu modelu. Konstrukce jsou řešeny pomocí prvků typu solid, kde první konstrukci je možné díky konstantnímu průřezu řešit navíc pomocí prvků typu shell.

Při porovnávání jednotlivých přístupů budou výsledky získané tenzometrickým měřením považovány za nejpřesnější. U obou konstrukcí je provedeno porovnání jednotlivých přístupů pro: minimální hlavní napětí na vnitřních vláknech  $\sigma_{B1}$ , maximální hlavní napětí na vnějších vláknech  $\sigma_{B2}$  a celkové posunutí bodu A ve směru osy y  $\Delta y_C$ . Porovnány budou výsledky získané pro největší zatížení tedy pro sílu  $F = 2011 \text{ N}$ .

Porovnání výsledků pro konstrukci č. 1 je uvedeno v tab. 17.

Přístup	Porovnávaná veličina		
	$\sigma_{B1} [\text{MPa}]$	$\sigma_{B2} [\text{MPa}]$	$\Delta y_C [\text{mm}]$
Tenzometricky	-135,5	105,4	0,680
Analytický (slabě z. p.)	8,8%	8%	1,6%
Analytický (silně z. p.)	5,2%	6,6%	2,3%
MKP (solid)	1,1%	1,6%	1,5%
MKP (shell)	2,2%	3,6%	1,5%

tab. 17: Porovnání výsledku pro konstrukci č. 1

Z tab. 17 je patrné že, MKP výpočet pomocí solid prvků se blíží tenzometrickému měření nejvíc a to s největší odchylkou 1,6 % pro maximální hlavní napětí na vnějších vláknech. Velice podobné výsledky vykazuje MKP výpočet pomocí shell prvků s maximální odchylkou 3,6 % taktéž u hlavního napětí na vnějších vláknech. Analytické výpočty jsou již méně přesné. U silně zakřivených prutů je vidět vliv posunutí neutrální osy i u takto štíhlého profilu, kde výsledky hlavního napětí na vnitřních vláknech jsou o 3,6 % přesnější oproti tenkým křivým prutům. U celkového posunutí bodu A musíme brát v úvahu, že měření bylo provedeno pomocí posuvného měřítka tedy s menší přesností. Nicméně výsledky se pohybují s odchylkou v rozmezí od 1,5 % do 3,6%.

Porovnání výsledků pro konstrukci č. 2 je uvedeno v tab. 18.

Přístup	Porovnávaná veličina		
	$\sigma_{B1}$	$\sigma_{B2}$	$\Delta y_C$
Tenzometricky	-86,1	65,7	0,24
MKP (solid)	1,3%	0,8%	2,6%

tab. 18: Porovnání výsledků pro konstrukci č. 2

Druhá konstrukce je řešena pouze MKP výpočtem pomocí prvků typu solid, kde největší rozdíl je vidět u celkového posunutí  $\Delta y_C$  2,6 %, rozdíl v hlavních napětích je pak už zanedbatelný.

Cílem této práce nebylo určit, která z metod řešení napjatosti a deformací je přesnější a která méně, každá z těchto metod má své výhody a nevýhody. Například u tenzometrického měření je nezbytné model součásti opatřit tenzometry, kterými lze vyhodnotit napětí jen v místě nalepení a měří pouze průměrnou deformaci. Analytická metoda je použitelná pouze pro součásti s jednoduchou geometrií a v dnešní době se využívá spíše jako kontrola. Metoda konečných prvků, která se používá pro řešení problémů nejen pružnosti a dynamiky, ale také třeba proudění kapalin a plynů, vedení tepla, aj. se stává stále populárnější metodou, kde přesnost jejího řešení závisí zejména na vytvoření adekvátního výpočtového modelu součásti společně s určením okrajových podmínek odpovídajících řešenému problému.

## 9 Použitá literatura

- [1] Janíček, P., Ondráček, E., Vrbka, J., Burša, J.: Mechanika těles – Pružnost a pevnost I, VUT – Brno, 2004, ISBN 80-214-2592-X
- [2] Lenert, J.: Pružnost a pevnost I, VŠB-TU Ostrava, 1996, ISBN 80-7078-572-2
- [3] Lenert, J.: Pružnost a pevnost II, VŠB-TU Ostrava, 1998, ISBN 80-7078-572-1
- [4] Fuxa, J., Adámková, L.: Sbírka příkladů z pružnosti a pevnosti II - 1. Část, VŠB-TU Ostrava, 2010, ISBN 978-80-248-1288-5
- [5] Macura, P.: Experimentální metody v pružnosti a plasticitě, VŠB-TU Ostrava, 2006, ISBN 80 – 7078 – 934 – 4
- [6] Macura, P.: Sbírka úloh z experimentální pružnosti, VŠB-TU Ostrava, 2008. ISBN 978-80-248-1823-8
- [7] VISHAY [online]. [cit. 2012-2-9]. Dostupné z WWW: <<http://www.vishay.com/>>.
- [8] OMEGA [online]. [cit. 2012-4-10]. Dostupné z WWW: <<http://www.omegaeng.cz> >.
- [9] Mahr Metrology [online]. [cit. 20012-4-10]. Dostupné z WWW: <<http://www.mahr.com>>.
- [10] HBM [online]. [cit. 2012-5-9]. Dostupné z WWW: <<http://www.hbm.cz> >.
- [11] ANSYS Inc. Documentation for ANSYS Release 12.1. SAS IP, Inc., 2009.

## **10 Seznam příloh**

**Příloha A** – kalibrační protokol snímače síly od firmy Omega

**Příloha B** – informace o použitých tenzometrech od firmy HBM

**Příloha C** – výrobní výkres konstrukce č. 1

**Příloha D** – výrobní výkres konstrukce č. 2



# Příloha - A

OMEGADYNE INC.

## LOAD CELL FINAL CALIBRATION

0.00 - 1000.00 KgF  
Excitation 10.000 Vdc

Job: RMLS7775  
Model: LCM101-1K  
Date: 2/10/2010  
Calibrated: 0.00 - 1000.00 KgF  
Serial: 225284  
Tested By: PEARL  
Temperature Range: +16 to 72 C.  
Specfile: LCM101

Force KgF	Unit Data mVdc
0.00	0.0000
500.00	15.0101
1000.00	30.0373
500.00	15.0463
0.00	0.0023

Balance 0.0528 mVdc  
Sensitivity 30.0373 mVdc  
In Resist 350.00 Ohms  
Out Resist 351.40 Ohms  
59K Shunt 14.8242 mVdc

ELECTRICAL LEAKAGE: PASS

ELECTRICAL WIRING/CONNECTOR: RED = +INPUT (EXC)  
BLACK = -INPUT (EXC)  
GREEN = +OUTPUT  
WHITE = -OUTPUT

This Calibration was performed using Instruments and Standards that are traceable to the United States National Institute of Standards Technology.

S/N	Description	Range	Reference	Cal Cert
098131	7500 LB STD	0 - 3401.943 KgF	C-2665	09012009S
3146A21498	HP34401A DMM UUT	Unit Under Test	C-2406	C-2406
US36090076	AT34401A DMM STD	Pressure Monitor	C-2495	906913958

Q.A. Representative : Pearl Stowers Date: 2/10/2010  
This transducer is tested to & meets published specifications. After final calibration our products are stored in a controlled stock room & considered in bonded storage. Depending on environment & severity of use factory calibration is recommended every one to three years after initial service installation date  
COMMENTS: FINIAL TEST IN TENSION

Omegadyne, Inc., 149 Stelzer Court, Sunbury, OH 43074 (740) 965-9340  
<http://www.omegadyne.com> email: [info@omegadyne.com](mailto:info@omegadyne.com) (800) USA-DYNE

## Příloha - B

### SG / Y series with 1 measuring grid / linear strain gages

Stock types		Variants	No- minal resistance	Dimensions (mm) [1 inch = 25.4 mm]				Max. perm. effective bridge excitation voltage	Solder terminals	
Steel	Aluminum			Others	Ω	Measuring grid				Measuring grid carrier
						a	b			
1-LY11-0.6/120	1-LY13-0.6/120	1-LY1x-0.6/120#	120	0.6	1	5	3.2	1.5	LS 7	
1-LY11-1.5/120	1-LY13-1.5/120	1-LY1x-1.5/120	120	1.5	1.2	6.5	4.7	2.5	LS 7	
1-LY11-3/120	1-LY13-3/120	1-LY1x-3/120	120	3	1.4	8.5	4.5	4	LS 7	
1-LY11-3/120A		1-LY1x-3/120A	120	3	1.4	8.5	4.5	4	LS 7	
1-LY11-6/120	1-LY13-6/120	1-LY1x-6/120	120	6	2.8	13	6	8	LS 5	
1-LY11-6/120A		1-LY1x-6/120A	120	6	2.8	13	6	8	LS 5	
1-LY11-10/120	1-LY13-10/120	1-LY1x-10/120	120	10	4.9	18.5	9.5	13	LS 5	
1-LY11-10/120A		1-LY1x-10/120A	120	10	4.9	18.5	9.5	13	LS 5	
1-LY11-1.5/350	1-LY13-1.5/350	1-LY1x-1.5/350#	350	1.5	1.2	5.7	4.7	4.5	LS 7	
1-LY11-3/350	1-LY13-3/350	1-LY1x-3/350	350	3	1.5	8.5	4.5	7	LS 7	
		1-LY1x-3/350A	350	3	1.5	8.5	4.5	7	LS 7	
1-LY11-6/350	1-LY13-6/350	1-LY1x-6/350	350	6	2.9	13	6	14	LS 5	
1-LY11-6/350A		1-LY1x-6/350A	350	6	2.9	13	6	14	LS 5	
1-LY11-10/350		1-LY1x-10/350	350	10	5	18.5	9.5	23	LS 5	
1-LY11-10/350A		1-LY1x-10/350A	350	10	5	18.5	9.5	23	LS 5	

#### LY11

Linear strain gage  
Temperature response matched to steel  
with  $\alpha = 10.8 \cdot 10^{-6}/K$

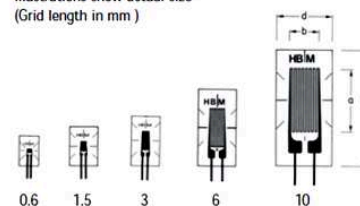
#### LY13

Temperature response matched to aluminum  
with  $\alpha = 23 \cdot 10^{-6}/K$

#### LY1x

Temperature response matching at customer's choice;  
see page 20

Illustrations show actual size  
(Grid length in mm)



Contents per package: 10 pcs.

Zdroj: HBM [online]. [cit. 2012-5-9]. Dostupné z WWW: <<http://www.hbm.cz>>.